



Titre: Présentation et applications de méthodes de séquençement de gains par commutation de contrôleurs
Title:

Auteur: Jean-Baptiste Couchoud
Author:

Date: 2005

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Couchoud, J.-B. (2005). Présentation et applications de méthodes de séquençement de gains par commutation de contrôleurs [Master's thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/7599/>
Citation:

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/7599/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche:
Advisors:

Programme: Unspecified
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

PRÉSENTATION ET APPLICATIONS DE MÉTHODES DE
SÉQUENCEMENT DE GAINS PAR COMMUTATION DE CONTRÔLEURS

JEAN-BAPTISTE COUCHOUD
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)
DÉCEMBRE 2005

© Jean-Baptiste Couchoud, 2005.



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 978-0-494-16767-0

Our file Notre référence

ISBN: 978-0-494-16767-0

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.


Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

PRÉSENTATION ET APPLICATIONS DE MÉTHODES DE
SÉQUENCEMENT DE GAINS PAR COMMUTATION DE CONTRÔLEURS

présenté par: COUCHOUD Jean-Baptiste

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. Richard Gourdeau, Ph.D., président

M. Lahcen Saydy, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. Richard Hurteau, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. Romano De Santis, Ph.D., membre

A mes parents,

REMERCIEMENTS

Je tiens avant tout à remercier messieurs Saydy et Hurteau sans qui ce projet n'aurait pu aboutir. Je tiens à souligner leurs efforts afin de me procurer un financement.

Je tiens aussi à souligner la bonne collaboration entre mon école d'origine (Supélec) et l'école polytechnique de Montréal qui s'est traduite entre autre par l'excellent accueil fait par madame Legault.

Je tiens aussi à remercier mes parents, à qui ce mémoire est dédié, pour m'avoir toujours soutenu quelques soient les difficultés auxquels ils devaient faire face.

Un grand merci à Suzanne Valade pour toujours avoir été là pour arranger les différentes affaires.

David Saussié n'est pas à oublier, en effet il a su me conseiller et me guider tout au long de la recherche.

Le soutien moral fourni par Ruku a été des plus précieux. Je me souviens avec émotion de mes premiers pas au Québec avec lui et Pim's.

Merci à Marsu pour sa bonne humeur quotidienne.

Je remercie aussi Tooguy sans qui le judo n'aurait pas eu la même saveur, Poulpy pour son amour du pastis, Mathilde et Julien pour leur présence agrémentée de délices culinaires.

Un grand merci aux Lazos et en particulier à Monsieur David, Charles, et Maître Loris.

Je tiens à remercier Yves et Chantal Couchoud pour les samedis bien sympathiques que l'ont a passé ensemble.

Merci à Eloïse pour être ce qu'elle est.

RÉSUMÉ

Au cours de ce travail, nous nous sommes intéressés au changement de point de fonctionnement de systèmes non linéaires.

Nous avons alors présenté deux méthodes permettant la conception d'un contrôleur qui ramène le système à l'origine pour toute trajectoire débutant dans un ensemble de points d'équilibre. Les deux méthodes présentées font appel au séquençement de gains par commutation de contrôleurs. Elles présentent l'avantage d'inclure le choix des différents points de linéarisation.

Afin de pouvoir calculer les différents contrôleurs, nous avons eu besoin des inégalités matricielles linéaires. En particulier, ceci nous a permis de résoudre des problèmes d'inclusions d'ensembles via la S-procedure.

La première méthode présentée utilise les fonctions de Lyapunov assignables. Elle est applicable pour des systèmes ayant plus d'états dits linéaires que de commandes. Pour s'affranchir de cette contrainte, nous avons élaboré un procédé utilisant l'estimation de domaines d'attraction.

Des études comparatives ont ensuite été faites. Les systèmes étudiés sont un pendule inversé sur chariot avec lien élastique, le modèle de la dynamique longitudinale d'un missile et un système de lévitation magnétique.

Ceci nous a permis de constater que lorsqu'elle était applicable, la méthode utilisant les fonctions de Lyapunov assignables nécessitait moins de points de linéarisation.

Au cours de ce mémoire, la question de la continuité de la commande lors des commutations n'a pas été entièrement traitée. Ceci peut faire l'objet de travaux futurs. De même, au cours des études de cas nous avons mis en avant la possibilité d'obtenir des domaines d'attractions trop conservatifs pour une quelconque mise en pratique de la procédure.

ABSTRACT

Our interest in this work was focused on the change of the operation point for nonlinear systems.

Two methods have been presented, both lead to controllers making the origin attractive for every trajectory beginning in a set of equilibrium points. Both of the methods belong to gain scheduling using commutation of controllers. They have the advantage of including the choice of the different linearisation points.

To calculate the different controllers linear matricial inequalities have been studied. By using S-procedure we have been able to solve problems of sets inclusions.

The first presented method uses control Lyapunov functions. Systems with more linear states than commands are needed.

In order to bypass this constraint we have elaborated a method based on the estimation of asymptotic stability regions.

Three cases have been pointed out : an inverted pendulum on a cartpole with elastic link, a model of longitudinal dynamic of a racket and a system of magnetic levitation.

These studies have lead to the conclusion that when the method based on control Lyapunov functions was applicable, less linearisations were needed.

Command continuity during commutation has not been studied in this report. This might be a subject for further works. Moreover we have pointed out some problems of conservatism during estimations of asymptotic stability regions.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	viii
LISTE DES FIGURES	xi
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES	xii
LISTE DES TABLEAUX	xiii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 LE SÉQUENCEMENT DE GAINS	3
1.1 Revue de littérature	3
1.2 Séquencement de gains basé sur les méthodes LPV	4
1.2.1 Présentation générale	5
1.2.2 Construction d'un contrôleur LPV	7
1.3 Séquencement de gains basé sur les méthodes de linéarisation	10
1.3.1 Un séquencement en quatre étapes	11
1.3.2 La question de la continuité de la commande lors d'une com- mutation	12
1.3.2.1 Cas général de la structure d'estimateur	13
1.3.2.2 Cas de la théorie de Hanus	16
1.3.3 Une alternative à la commutation	18

1.4 Bilan	22
CHAPITRE 2 LES INÉGALITÉS MATRICIELLES LINÉAIRES	23
2.1 Un problème d'optimisation particulier.	24
2.2 Utilisation faite dans le cadre de l'estimation de domaine de stabilité asymptotique.	28
2.3 Bilan	35
CHAPITRE 3 UTILISATION DES FONCTIONS DE LYAPUNOV ASSI- GNABLES POUR LE SÉQUENCEMENT DE CONTRÔ- LEURS	36
3.1 Définition des fonctions de Lyapunov assignables et problématique .	36
3.2 Mise en forme du système	40
3.3 Paramétrisation du noyau de commandabilité	44
3.4 Algorithmes	52
3.4.1 Construction d'une fonction de Lyapunov assignable sur un ensemble plus vaste	52
3.4.2 Choix de la constante $c > 0$	57
3.5 Bilan et discussion	58
CHAPITRE 4 UTILISATION DE L'ESTIMATIONS DE DOMAINES D'AT- TRACTION POUR LE SÉQUENCEMENT DE CONTRÔ- LEURS	61
4.1 Etat de l'art	62
4.1.1 Les méthodes non Lyapunov	63
4.1.2 Méthodes basées sur le théorème de Zubov	64
4.1.3 Méthodes basées sur le théorème de Lasalle	65
4.2 Présentation de la méthode d'estimation d'un domaine d'attraction	67
4.3 Algorithme de séquencement de contrôleurs	75

4.4	Discussion et comparaison avec la méthode utilisant les fonctions de Lyapunov assignables	78
CHAPITRE 5 ETUDES DE CAS		80
5.1	Cas du pendule inversé sur chariot avec lien élastique	80
5.1.1	Présentation du système et objectif de la commande	80
5.1.2	Construction des contrôleurs séquencés	85
5.1.2.1	Méthode utilisant les fonctions de Lyapunov assignables	85
5.1.2.2	Méthode utilisant l'estimation de domaines d'attraction	89
5.1.2.3	Comparaison des deux méthodes	94
5.2	Cas d'un modèle de dynamique longitudinale d'un missile	95
5.2.1	Présentation du système et objectif de la commande	95
5.2.2	Construction des contrôleurs séquencés	100
5.2.2.1	Méthode utilisant les fonctions de Lyapunov assignables	100
5.2.2.2	Méthode utilisant l'estimation de domaines d'attraction	104
5.2.2.3	Bilan	109
5.3	Cas d'un système de lévitation magnétique	110
5.3.1	Présentation du système	110
5.3.2	Une estimation aboutissant à un ellipsoïde de faible volume	113
5.3.3	Bilan	114
CONCLUSION		116
RÉFÉRENCES		118

LISTE DES FIGURES

FIG. 1.1	<i>Système LPV avec contrôleur</i>	7
FIG. 1.2	<i>Contrôleur muni d'une structure d'estimateur</i>	16
FIG. 1.3	<i>Structure simplifiée dans le cas de la théorie de Hanus . . .</i>	18
FIG. 2.1	<i>Exemple d'ensembles convexes et non convexes</i>	25
FIG. 2.2	<i>Exemple de fonctions convexes et non convexes</i>	25
FIG. 2.3	<i>Illustration graphique de la S-procedure</i>	29
FIG. 2.4	<i>Exemple 1 : Cas d'inclusion totale</i>	33
FIG. 2.5	<i>Exemple 2 : Cas d'inclusion partielle</i>	34
FIG. 2.6	<i>Exemple 3 : Cas de non inclusion</i>	35
FIG. 3.1	<i>Exemple d'ensemble connexe et non connexe</i>	54
FIG. 3.2	<i>Illustration graphique de la procédure</i>	56
FIG. 4.1	<i>Résultat de l'estimation pour le système 1</i>	74
FIG. 4.2	<i>Résultat de l'estimation pour le système 2</i>	75
FIG. 4.3	<i>Illustration graphique de la méthode</i>	77
FIG. 5.1	<i>Pendule inversé sur chariot avec lien élastique</i>	81
FIG. 5.2	<i>domaine d'assignabilité de V pour le pendule inversé</i>	89
FIG. 5.3	<i>Ensemble des estimés de domaines d'attraction pour le pen- dule inversé</i>	94
FIG. 5.4	<i>Missile vu dans le plan vertical</i>	96
FIG. 5.5	<i>Représentation graphique de Ω_0</i>	104
FIG. 5.6	<i>Ensemble des estimés calculés pour le missile</i>	109
FIG. 5.7	<i>Système de lévitation magnétique</i>	110

LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

LMI :	Linear Matrix Inequalities
LPV :	Linear Parameters Varying
LFT :	Linear Fractional Transformations
x :	Vecteur d'états
\mathbb{R} :	Espace des réels
n :	Dimension de l'espace d'états
k :	Nombre d'états non linéaires
m :	Nombre de commandes
E :	Ensemble des points d'équilibre mis en objectif
Ω :	Domaine de stabilité asymptotique
$L_f V$:	Dérivée de Lie de V selon f
C^∞ :	Ensemble des fonctions dont les dérivées de tout ordre sont continues

LISTE DES TABLEAUX

TAB. 5.1	<i>Valeurs numériques des paramètres du pendule inversé sur chariot avec lien élastique</i>	82
TAB. 5.2	<i>Valeurs numériques des paramètres du missile</i>	97
TAB. 5.3	<i>Valeurs numériques des paramètres du système de lévitation magnétique</i>	111

INTRODUCTION

Le séquençement de gains regroupe un ensemble de techniques permettant à un système d'opérer dans différents environnements. Ces techniques furent d'abord utilisées dans l'industrie avant de faire leur apparition dans le milieu de la recherche au début des années 90.

Nous considérons des systèmes non linéaires. Nous allons voir deux méthodes permettant la conception de contrôleurs répondant à la problématique suivante :

Soit E un ensemble de points d'équilibre. Soit $x_{objectif}$ un point d'opération du système non linéaire considéré. Nous désirons concevoir une commande telle que toute trajectoire débutant dans E converge vers $x_{objectif}$. Ainsi, nous serons en mesure de changer de point de fonctionnement.

A cette fin, nous nous sommes intéressé au séquençement de gains. Une présentation générale du "gain scheduling" au cours du premier chapitre nous permettra de situer les méthodes employées.

Afin de limiter le nombre de points de linéarisation, tout en garantissant la stabilité du système, nous nous sommes intéressé à deux méthodes. L'une fait appel aux fonctions de Lyapunov assignables, l'autre à l'estimation de domaines d'attraction. Dans chacun des cas, nous serons amenés à utiliser les LMI's (acronyme anglais pour Inégalités Matricielles Linéaires). Ceci fera l'objet du chapitre 2.

Au cours du troisième chapitre, nous présenterons une méthode de séquençement de contrôleurs utilisant les fonctions de Lyapunov assignables. Nous verrons à quelle classe de systèmes non linéaires cette technique est applicable.

Afin de s'abroger de certaines limitations relatives à la technique précédente, nous

développerons au cours du chapitre 4 une méthode utilisant l'estimation de domaines d'attraction.

Le chapitre 5 regroupe un ensemble d'étude de cas. Ainsi nous traiterons l'exemple d'un pendule inversé sur chariot avec lien élastique, celui d'un modèle de la dynamique longitudinale d'un missile, et celui d'un système de lévitation magnétique.

Lors de cette recherche, la question de la continuité de la commande n'a pas été entièrement traitée. Des idées seront néanmoins mises en avant lors du premier chapitre. L'approfondissement de cette question peut être un axe de recherche afin de prolonger le travail effectué.

CHAPITRE 1

LE SÉQUENCEMENT DE GAINS

Au cours de ce chapitre, nous présenterons un ensemble de techniques regroupées sous le nom de séquençement de gains ou “gain scheduling”. Nous verrons ce qui peut mener à l’emploi de telles méthodes, puis présenterons les deux grandes classes de techniques : celles dites LPV (pour “Linear Parameters Varying”), celles par commutation de contrôleurs. Une fois ceci achevé, nous aurons défini dans quel cadre se situent les techniques que nous allons employer.

1.1 Revue de littérature

L’idée du séquençement de gains est assez ancienne. On peut citer l’exemple de l’autopilote du bombardier stratégique B-52 (1951) qui comportait un mécanisme basée sur la mesure de la vitesse air pour modifier le gain.

L’idée du séquençement a été motivée par le constat que dans des environnements différents la dynamique du système peut fortement évoluer. Dans le domaine aéronautique, l’entrée dans l’ère des jets, les avances dans le domaine du guidage de missiles et la nécessité d’étendre les enveloppes de vol avec des exigences de performance plus grandes ont encouragé le développement de ce type de méthode de contrôle.

De plus, le développement des contrôleurs numériques a grandement facilité l’implémentation de cette méthode.

Néanmoins, si cette méthode était relativement développée en pratique, ce ne fut qu'à partir du début des années 1990 que le milieu de la recherche s'y intéressa. Les LFT (pour "Linear Fractional Transformations") et le formalisme LMI (pour "Linear Matricial Inequalities") ont fortement participé à l'entrée du séquençement de gains dans la recherche.

Le choix du séquençement de gains comme technique de contrôle est directement lié au cahier des charges. En effet, plus ce dernier est exigeant, plus le concepteur risque d'être contraint de s'orienter vers des techniques évoluées. C'est ce qui peut forcer à l'emploi du séquençement de gains. Par ailleurs, ces exigences influent sur la précision nécessaire du modèle employé. La complexité du modèle employé peut souvent être mis en parallèle avec la complexité du contrôleur qui en découle.

Nous présenterons dans ce qui suit les deux grandes classes de techniques de séquençement de gains : les méthodes s'appuyant sur une modélisation dite LPV (pour "Linear Parameters Varying") et celles s'appuyant sur un ensemble de linéarisations du système réel.

1.2 Séquençement de gains basé sur les méthodes LPV

Entre 1995 et 1998, parmi les 185 articles répertoriés parlant de séquençement de gains, 54 évoquaient des systèmes LPV (Rugh, Shamma, 2000). Ce type de système, ou plutôt de modélisation, représente donc une part importante de la recherche sur le séquençement de gains. Par conséquent, il est nécessaire d'en présenter les principaux éléments.

1.2.1 Présentation générale

Nous allons introduire la modélisation sous forme LPV (littéralement linéaire à paramètres variants) à travers un exemple simple : un pendule.

La dynamique de ce système peut être représentée par l'équation différentielle suivante :

$$ml^2\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + mgl \sin(\theta) = u, \quad (1.1)$$

où θ est l'angle que fait le pendule avec la verticale descendante, m sa masse, l sa longueur, B un coefficient de frottement autour de l'axe de rotation, et u le couple exercé autour de ce même axe.

La façon la plus classique de modéliser ce système d'un point de vue automatique est alors le modèle d'état non linéaire en prenant pour vecteur d'état $x = [\theta \ \dot{\theta}]^T$. Ceci permet la conservation de la totalité de l'information concernant la non linéarité du système. En revanche, ceci interdit toute utilisation des techniques basées sur l'algèbre linéaire.

L'objectif recherché par la modélisation LPV est de conserver un maximum d'information sur les non linéarités du système, tout en offrant la possibilité d'utiliser des outils d'algèbre linéaire.

C'est pourquoi, on cherchera à donner un modèle d'état sous la forme suivante :

$$\dot{x} = A(\sigma(t))x + B(\sigma(t))u \quad (1.2)$$

$A(.)$ et $B(.)$ sont ici des matrices. Le paramètre $\sigma(t)$ permet de tenir compte de l'influence du milieu dans lequel évolue le système sur la linéarisation autour du point d'opération.

Dans le domaine de la commande de vol, ce vecteur peut par exemple comprendre la pression statique, la température, la densité de l'air, etc...

Le paramètre $\sigma(t)$ est a priori indépendant de $x(t)$. Cependant, il est parfois utile d'introduire des variables d'états dans ce paramètre. Dans ce cas, la modélisation sera dite quasi-LPV.

Une modélisation quasi-LPV du pendule est donnée en écrivant :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}(\frac{\sin(\theta)}{\theta}) & -\frac{B}{ml^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{pmatrix} u \quad (1.3)$$

Si on pose $\sigma(t) = \frac{\sin(\theta(t))}{\theta(t)}$, on obtient alors une modélisation LPV du pendule. On écrit alors :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\sigma & -\frac{B}{ml^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{pmatrix} u \quad (1.4)$$

Il est à noter que cette modélisation est incomplète si nous omettons de préciser la plage des variations possibles pour $\sigma(t)$. On définit ainsi l'ensemble :

$$S = \{\sigma \in \mathbb{R}^p : |\sigma_i| \leq \bar{\sigma}_i\}.$$

Comme nous l'évoquerons dans ce qui suit, la connaissance des valeurs admissibles de $\sigma(t)$ est aussi nécessaire. Nous noterons par la suite cet ensemble R , avec :

$$R = \{\rho \in \mathbb{R}^p : |\rho_i| \leq \bar{\rho}_i\}.$$

1.2.2 Construction d'un contrôleur LPV

Une fois le système mis sous forme LPV, on cherchera à concevoir un contrôleur tenant compte des évolutions du paramètre $\sigma(t)$. On cherche ainsi à se ramener à un système en boucle fermée de la forme de celui de la figure 1.1.

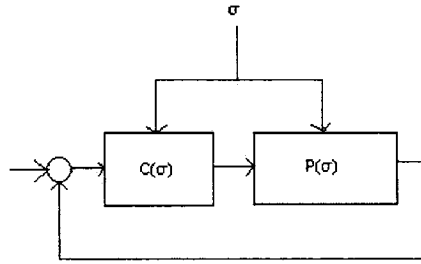


FIG. 1.1 *Système LPV avec contrôleur*

Avec $P(\sigma)$ le système mis sous forme LPV et $C(\sigma)$ le contrôleur LPV.

On va reprendre l'exemple du pendule simple pour illustrer une construction de contrôleur LPV. Dans ce cas, on va chercher à construire un retour d'état qui stabilise le système défini par :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\sigma & -\frac{B}{ml^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{pmatrix} u \quad (1.5)$$

Avec $\sigma(t) \in [0, 1]$ et $\dot{\sigma}(t) \in [-1, 1]$. De façon générale, il est essentiel de tenir compte

des valeurs admissibles pour $\dot{\sigma}(t)$. En effet, on peut trouver dans (Shamma, Athans, 1992) une illustration prouvant que l'oubli de cette information peut conduire à des résultats faux.

Dans le cas du pendule simple, on va donc chercher le gain $K(\sigma) = [K_1(\sigma) \ K_2(\sigma)]$ qui stabilise le pendule pour toute trajectoire telle que $\sigma(t) \in [0, 1]$ et $\dot{\sigma}(t) \in [-1, 1]$.

Pour pouvoir construire ce gain, nous allons nous référer au théorème suivant :

Théorème (Rugh, Shamma, 2000) :

On considère le système en boucle fermée sous forme LPV suivant :

$$\dot{x} = A(\sigma(t), \dot{\sigma}(t))x \quad (1.6)$$

Si il existe $X(\sigma)$ symétrique définie positive telle que :

$X(\sigma)A(\sigma, \rho) + A^T(\sigma, \rho)X(\sigma) + \sum_{i=1}^p \rho_i \frac{\partial X(\sigma)}{\partial \sigma_i} < 0$ et ce $\forall \sigma \in S$ et $\forall \rho \in R$, avec S et R les ensembles précédemment définis. Alors le système 1.6 est exponentiellement stable en boucle fermée pour toute trajectoire dont les paramètres sont tels que $\sigma(t) \in S$ et $\dot{\sigma}(t) \in R$.

Dans le cas du pendule simple, on est donc amené à résoudre l'inégalité suivante :

$$X(\sigma)(A(\sigma) - BK(\sigma)) + (A(\sigma) - BK(\sigma))^T X(\sigma) + \rho \frac{\partial X(\sigma)}{\partial \sigma} < 0 \quad (1.7)$$

Et ce pour tout σ de S et ρ de R . Cette inégalité a pour inconnues $K(\sigma)$ et $X(\sigma)$.

Deux difficultés apparaissent alors.

La première réside dans le fait qu'on ne connaît a priori ni la forme de la dépendance de $K(\sigma)$ en σ ni celle de $X(\sigma)$. Ceci pose un problème à cause du terme $\frac{\partial X(\sigma)}{\partial \sigma}$. Deux méthodes sont proposées par Rugh dans (Rugh, Shamma, 2000). La première consiste à faire l'hypothèse de la forme générale des solutions, l'autre à discrétiser les ensembles R et S afin de pouvoir approximer la dérivée par son taux de variation.

La seconde difficulté est la non linéarité de cette inégalité qui rend toute résolution délicate. Afin de remédier à ce problème, Rugh dans (Rugh, Shamma, 2000) propose une post et pré multiplication par $X(\sigma)^{-1}$. On se ramène ainsi à l'inégalité suivante :

$$A(\sigma)Y(\sigma) - BE(\sigma) + Y(\sigma)A(\sigma)^T - E(\sigma)^T B^T - \rho \frac{\partial Y(\sigma)}{\partial \sigma} < 0 \quad (1.8)$$

Dans cette expression, on a posé $Y(\sigma) = X^{-1}(\sigma)$ et $E(\sigma) = K(\sigma)X^{-1}(\sigma)$.

Une telle inéquation est appelée inégalité matricielle linéaire. Ce type de problème sera l'objet du second chapitre. C'est pourquoi nous n'entrerons pas dans les détails ici.

En appliquant la discrétisation des ensembles R et S , on est donc amené à résoudre un ensemble d'inégalités. Ceci nous permet d'obtenir des valeurs pour le retour d'état cherché.

Cet exemple nous a permis de mettre en avant deux difficultés intrinsèques à l'utilisation des méthodes LPV.

La première est la modélisation. En effet, nous sommes amené à faire un compromis entre la précision du modèle et la possibilité d'utiliser la représentation à des fins de contrôle. Un modèle trop peu précis peut mener à des problèmes de conservatisme. Dans l'exemple utilisé, nous avons employé une variable σ dont les évolutions ont

été plus libres que celles de $\frac{\sin(\theta)}{\theta}$. Cette perte d'information peut être la source de difficultés à trouver un contrôleur.

Le deuxième point mis en avant concerne la résolution de l'inégalité assurant la stabilité. Nous avons évoqué l'existence de transformations nécessaires pour rendre le problème solvable d'un point de vue numérique.

L'exemple n'a fait mention que de la question de la stabilité. Nous pouvons trouver dans (Rugh, Shamma, 2000) un théorème permettant la construction de contrôleurs assurant des performance du type :

- réduction de l'erreur de poursuite,
- rejet de bruit et de perturbation,
- stabilité robuste,
- etc.

1.3 Séquencement de gains basé sur les méthodes de linéarisation

Le séquencement de gains basé sur les méthodes de linéarisation est rencontré dans la littérature anglophone sous l'expression “command and conquer gain scheduling”.

Leith (Leith, Leithead, 2000) regroupe dans cet ensemble les méthodes utilisant l'un des trois types de linéarisation suivant :

- la linéarisation jacobienne,
- la modélisation floue (“Neural/fuzzy gain scheduling”),
- la linéarisation hors équilibre pour laquelle de plus amples détails sont disponibles dans (Leith, Leithead, 1998).

Dans ce qui suit, nous verrons le principe général de ce type de séquençement de gains, puis nous évoquerons la question de la continuité de la commande.

1.3.1 Un séquençement en quatre étapes

Une fois le type de linéarisation choisie, quatre étapes vont composer le séquençement de gains. On retrouve ce principe dans (Rugh, Shamma, 2000) et (Leith, Leithead, 2000).

1. Modéliser le système autour d'un ensemble de points d'opérations paramétrés par une variable de séquençement.
2. Concevoir un contrôleur linéaire invariant dans le temps pour chacun des points choisis.
3. Concevoir un contrôleur non linéaire en séquençant les différents contrôleurs linéaires conçus à l'étape 2.
4. Valider l'ensemble par la simulation.

La grande difficulté de cette méthode réside dans le choix des points de linéarisation. En effet, entre chaque point, nous n'avons aucune connaissance de la dynamique du système. Si l'ensemble des points choisis n'est pas assez dense, on se rendra compte que le contrôleur ne fonctionne pas que lors de la dernière étape. Dans ce cas, il faudra reprendre toute la conception. Si le nombre de points de linéarisation est trop dense, le contrôleur exigera un coût en calcul trop élevé au moment de sa conception et au moment de sa mise en ligne. Le système devra alors avoir en mémoire un nombre important de contrôleurs et chercher le bon peut alors prendre un temps non négligeable.

Une bonne connaissance du système est alors impérative pour éviter un tâtonnement intempestif. En effet, cette connaissance peut permettre de choisir des variables de séquençement évoluant lentement, les linéarisations seront alors valables sur un espace plus vaste.

La question du choix des points de linéarisation sera abordée lors des chapitre 3 et 4. La seconde question à régler lorsqu'on utilise ce type de séquençement de gains est le passage d'un contrôleur à l'autre. Nous allons évoquer dans les sections suivantes des méthodes pour assurer la continuité de la commande. Néanmoins, ce qui suit n'a aucune prétention d'exhaustivité et n'a pour autre objectif que celui de sensibiliser le lecteur à cette question.

1.3.2 La question de la continuité de la commande lors d'une commutation

Le problème du passage d'un contrôleur à l'autre peut être résumé comme suit. Il existe un contrôleur C_1 qui est en ligne. On désire passer à un contrôleur C_2 qui est hors ligne. Une méthode intuitive pour passer de l'un à l'autre est la commutation, c'est à dire le passage brutale de la commande $u_1(t)$, fournie par C_1 , à la commande $u_2(t)$, fournie par C_2 . Or, il est plus que probable que les deux valeurs de commandes diffèrent au moment de la transition de l'une à l'autre. Cette différence peut provoquer non seulement une usure prématurée du système de commande, mais risque aussi de déstabiliser le système.

Souvent, lorsqu'on s'intéresse au contrôle d'un système, on omet la modélisation de la dynamique des actionneurs. Ceci est fait afin d'alléger la conception du contrôleur. Ainsi, même si théoriquement la passage d'un valeur de commande à une autre est nécessaire au contrôle d'un système, en pratique cette transition

n'aura jamais lieu. En effet, la dynamique propre de l'actionneur implique un certain temps de réponse. Si d'un point de vue simulation on considère que ce temps est nul, on peut être confronté lors du passage à la pratique à trouver des résultats inattendus, tels la déstabilisation du système. De plus, l'actionneur est susceptible de saturer, ce qui risque de l'endommager fortement.

Afin de remédier à ce type de problème, l'idée consiste à ajouter au contrôleur initialement conçu une structure d'observateur. Le nouveau contrôleur doit alors avoir les caractéristiques suivantes :

- Avoir le même comportement que le contrôleur initialement conçu lorsque celui-ci doit être en ligne.
- Fournir une commande la plus proche possible de celle appliquée au système lorsqu'il n'est pas en ligne.

1.3.2.1 Cas général de la structure d'estimateur

Ce cas est présenté dans (Aström, Rundqwist, 1989) et (Aström, Wittenmark, 1989), et A.Darbois l'a résumé dans (Darbois, 2001).

Nous supposons avoir conçu un contrôleur dont le modèle d'état est le suivant :

$$\dot{x} = Ax + Bw \tag{1.9}$$

$$u = Cx + Dw \tag{1.10}$$

Avec x l'état du contrôleur, w son entrée et u sa sortie.

On désire faire suivre la sortie de ce contrôleur et le signal d'entrée du système à

commander, noté \tilde{u} .

La stratégie adoptée est de mesurer la différence $\tilde{u} - u$, et de s'en servir pour estimer l'état que devrait avoir le contrôleur pour que $u = \tilde{u}$, tout en sachant que l'entrée du contrôleur est w . On fait ici l'hypothèse qu'un tel état existe. On verra ultérieurement que cette hypothèse est justifiée. On note \tilde{x} cet état. Moyennant l'existence de \tilde{x} , on a :

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bw \quad (1.11)$$

$$\tilde{u} = C\tilde{x} + Dw \quad (1.12)$$

Ces équations expriment la dynamique désirée du contrôleur final. On va se rapprocher de celle-ci en ajoutant une structure d'estimateur au contrôleur défini par les équations 1.9 et 1.10. On obtient ainsi le système suivant :

$$\dot{x} = Ax + Bw + H(\tilde{u} - u) \quad (1.13)$$

$$u = Cx + Dw \quad (1.14)$$

Avec H un gain à déterminer.

Il est à noter que dans le cas où ce contrôleur est en ligne, on retrouve la structure du contrôleur initialement conçu.

Si on injecte 1.14 dans 1.13, on obtient le système :

$$\dot{x} = Ax + Bw + H(\tilde{u} - Cx - Dw) \quad (1.15)$$

$$u = Cx + Dw \quad (1.16)$$

L'équation 1.15 peut être réécrite :

$$\dot{x} = (A - HC)x + (B - HD)w + H\tilde{u} \quad (1.17)$$

On peut ainsi obtenir la dynamique de l'erreur entre l'état du contrôleur x et l'état désiré \tilde{x} en soustrayant les équations 1.11 et 1.17, puis en remplaçant \tilde{u} par son expression donnée dans 1.12 . En notant $e = \tilde{x} - x$ cette erreur, on obtient :

$$\dot{e} = (A - HC)e \quad (1.18)$$

L'objectif est alors de choisir H de sorte à rendre cette dynamique asymptotiquement stable. Or, la seule condition pour que ceci soit possible est que la paire (A, C) soit détectable.

Remarque : existence de \tilde{x}

Le fait que la paire (A, C) soit détectable assure l'existence de \tilde{x} .

En effet, supposons que \tilde{x} n'existe pas et que la paire (A, C) soit détectable. Alors, on peut déterminer H tel que la dynamique de l'erreur e soit asymptotiquement stable. C'est à dire que cette erreur va tendre vers 0 de façon asymptotique. Autrement dit x va tendre vers \tilde{x} . Ce qui est absurde avec l'hypothèse de non existence de \tilde{x} .

Une fois H déterminé, on implémentera la structure de contrôleur de la figure 1.2.

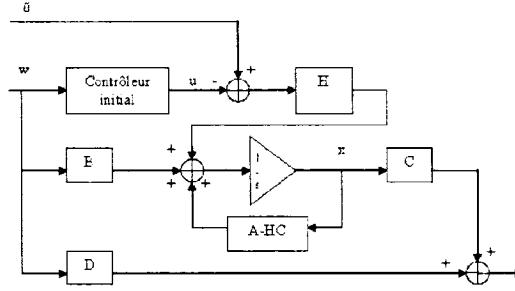


FIG. 1.2 Contrôleur muni d'une structure d'estimateur

La sortie fournie par cette structure tend à suivre l'entrée du système à contrôler. De plus, la dynamique de ce contrôleur est identique à celle de celui initialement conçu lorsqu'il est en ligne.

1.3.2.2 Cas de la théorie de Hanus

Dans (Hanus, Kinnaert, Henrotte, 1987), Hanus considère le cas où la matrice D est non nulle et inversible. Ce cas particulier permet une implémentation du contrôleur plus simple. En revanche, dans ce cas particulier, le concepteur n'a pas le choix du gain H de l'observateur.

Dans le cadre de cette théorie, on va travailler sur la valeur de l'entrée du contrôleur, c'est-à-dire que nous allons chercher une expression d'une entrée réalisable, notée \tilde{w} , telle que :

$$\dot{x} = Ax + B\tilde{w} \quad (1.19)$$

$$\tilde{u} = Cx + D\tilde{w} \quad (1.20)$$

La théorie de Hanus utilise le principe que l'expression 1.21 est valable pour le même état que celui de l'expression 1.20.

$$u = Cx + Dw \quad (1.21)$$

Ainsi en soustrayant 1.20 à 1.21 et en supposant D inversible, on obtient l'expression de \tilde{w} donnée par l'équation :

$$\tilde{w} = w + D^{-1}(\tilde{u} - u) \quad (1.22)$$

En injectant 1.21 dans 1.22, on obtient :

$$\tilde{w} = D^{-1}(\tilde{u} - Cx) \quad (1.23)$$

Puis en injectant 1.23 dans 1.19, on obtient :

$$\dot{x} = (A - BD^{-1}C)x + BD^{-1}\tilde{u} \quad (1.24)$$

Deux remarques sont alors à formuler. La première consiste à affirmer que cette structure ne sera stable que si la matrice $A - BD^{-1}C$ l'est. Ceci limite donc la possibilité d'utilisation de cette structure. La seconde consiste à remarquer que l'équation 1.17 se ramène à 1.24 en posant $H = BD^{-1}$. On peut donc comparer le cas de Hanus à celui d'une structure d'observateur.

Sous réserve d'applicabilité de cette théorie, la structure permettant la continuité d'une commande se trouve allégée. En effet, dans ce cas ci nous pouvons nous

ramener au schéma de la figure 1.3

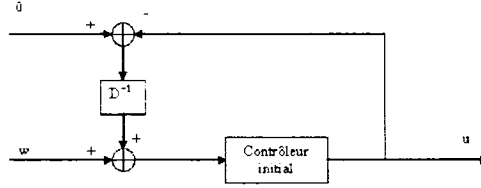


FIG. 1.3 *Structure simplifiée dans le cas de la théorie de Hanus*

1.3.3 Une alternative à la commutation

Ce qui a été présenté au cours de la section précédente supposait que le contrôleur puisse être mis sous la forme suivante :

$$\dot{x} = Ax + Bw \quad (1.25)$$

$$u = Cx + Dw \quad (1.26)$$

Ceci est le cas de tous les contrôleurs linéaires. Un bémol est quand même à apporter. En effet, dans le cas d'un simple gain, la matrice C de ce type de modèle est nulle. Ceci rend toute utilisation d'une structure d'estimateur absurde. En effet, si on reprend la figure 1.2, on constate que la modification de l'état du contrôleur ne peut avoir d'influence sur la continuité de la commande. Si $C = 0$, une alternative est alors la combinaison convexe de gains.

L'idée est d'interpolier les gains. Considérons un système dont l'entrée est notée U

et le vecteur d'état X . Supposons que l'on ait conçu deux gains K_1 et K_2 , l'un pour le point (X_1, U_1) l'autre pour le point (X_2, U_2) . On appliquera alors le gain suivant :

$$K(\lambda) = \lambda K_1 + (1 - \lambda) K_2 \quad (1.27)$$

Avec λ une variable prenant des valeurs comprises entre 0 et 1 et telle que, lorsque le système opère au point (X_1, U_1) , $K = K_1$ et similairement pour le point (X_2, U_2) .

Cependant, rien ne garantit a priori que le gain $K(\lambda)$ stabilise le système entre les points indicés 1 et 2.

Dans sa thèse, Clément (Clement, 2001) ouvre une voie pour la construction de λ tel que la stabilité soit assurée entre deux points d'opération.

Il considère le système LTI (linéaire invariant dans le temps) discret suivant :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (1.28)$$

et suppose l'existence de deux gains de retour d'état, K_1 et K_2 tels que $A + BK_1$ et $A + BK_2$ soient stables.

Alors, il existe deux matrices P_1 et P_2 symétriques définies positives telles que le gain suivant soit stabilisant :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathfrak{R}^+, \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0, K(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1 K_1 P_1 + \lambda_2 K_2 P_2)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)^{-1} \quad (1.29)$$

Remarque :

Il est à noter que $K(1, 0) = K_1$ et $K(0, 1) = K_2$.

Remarque :

Une généralisation pour plus que deux gains est possible dans le cas d'un nombre fini de correcteurs en posant :

$$K = \left(\sum_i \lambda_i K_i P_i \right) \left(\sum_i \lambda_i P_i \right)^{-1} \quad (1.30)$$

La preuve pour le cas de deux gains se fait comme suit :

On définit les fonctions de Lyapunov suivantes :

$$V_i(x) = x^T P_i^{-1} x \quad (1.31)$$

Alors l'inégalité suivante est vérifiée :

$$(A + BK_i)^T P_i^{-1} (A + BK_i) - P_i^{-1} < 0 \quad (1.32)$$

Cette inégalité peut être transformée à l'aide du lemme de Schur (celui-ci sera présenté lors du chapitre 2 sur les LMI's). On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} -P_i^{-1} & P_i^{-1}(A + BK_i) \\ (A + BK_i)^T P_i^{-1} & -P_i^{-1} \end{pmatrix} < 0 \quad (1.33)$$

Après pré-multiplication par :

$$\begin{pmatrix} P_i & 0 \\ 0 & P_i \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

et post-multiplication par sa transposée, on obtient :

$$\begin{pmatrix} -P_i & (A + BK_i)P_i \\ P_i(A + BK_i)^T & -P_i \end{pmatrix} < 0 \quad (1.35)$$

On définit alors les valeurs suivantes :

$$P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \quad (1.36)$$

$$K = (\lambda_1 K_1 P_1 + \lambda_2 K_2 P_2)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)^{-1} \quad (1.37)$$

P est bien définie positive, et en effectuant une combinaison linéaire des deux équations comprises dans 1.35, on obtient :

$$\begin{pmatrix} -P & (A + BK)P \\ P(A + BK)^T & -P \end{pmatrix} < 0 \quad (1.38)$$

On vérifie ainsi l'existence d'une fonction de Lyapunov pour le système en boucle fermée par le gain K précédemment défini.

Ceci achève la démonstration.

Remarques :

Ceci n'est pas aisément retranscriptible à un système continue du fait de la forme différente des équations de Lyapunov. Dans le cas des systèmes continus dans le temps, on ne peut appliquer le lemme de Schur.

De plus, ceci n'est applicable qu'aux systèmes linéaires. Introduire la variable de séquençement n'introduira alors qu'un nouveau découpage ce qui augmenterait alors de manière considérable le coût calculatoire de la conception du contrôleur séquencé.

1.4 Bilan

Nous avons vu lors de ce chapitre les différentes classes de séquençement de gains. Nous avons également brièvement mentionné la question de la continuité de la commande lors de la commutation de contrôleurs.

Dans le cas du séquençement de gains utilisant la linéarisation du système, un des problèmes est le choix des différents points de linéarisation. Pour répondre à cette question, nous allons présenter lors des chapitres 3 et 4 des méthodes dont l'implémentation nécessite de pouvoir vérifier l'inclusions de deux ensembles de négativité de formes quadratiques. Ceci peut être fait à l'aide de la S-procedure qui sera définie au cours du chapitre 2.

CHAPITRE 2

LES INÉGALITÉS MATRICIELLES LINÉAIRES

Lors de l'utilisation des méthodes de séquençement de contrôleurs que nous présenterons au cours des chapitres 3 et 4, nous allons faire appel aux inégalités matricielles linéaires (plus connues sous l'acronyme anglais LMI).

Nous avons déjà rencontré ce type d'inégalité lors de la présentation des méthodes LPV au cours du chapitre 1. La question était alors un problème d'existence. Dans le cas des LMI's, on peut répondre à ce type de question de façon certaine. C'est à dire que soit une solution existe et nous sommes alors capable d'en donner une, soit aucune solution n'existe et nous sommes alors en mesure de le garantir.

Nous montrerons ce qui permet de répondre avec certitude à un problème d'existence, en situant les LMI's parmi les problèmes d'optimisation.

Dans les chapitres à venir, les méthodes utilisées demande de pouvoir répondre à la question suivante :

Est-ce que l'ensemble $\epsilon_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T A_1 x + 2b_1^T x + c_1 < 0\}$ est inclus dans l'ensemble $\epsilon_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T A_2 x + 2b_2^T x + c_2 < 0\}$?

Nous allons voir que nous pouvons répondre à ce type de question en utilisant les LMI's grâce à un corollaire appelé procédure-S (ou "S-procedure" en anglais).

Avant toute chose, nous allons définir les inégalités matricielles linéaires.

2.1 Un problème d'optimisation particulier.

Les définitions qui vont suivre peuvent être trouvées dans (Scorletti, 2003). Elles vont être utiles à comprendre la force de l'outil mathématique que sont les LMI's.

Définition : problème d'optimisation de dimension finie.

Soit une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. On considère le problème :

$$\min_{x \in C} f(x), \quad (2.1)$$

où $C \subset \mathbb{R}^n$ est l'ensemble des contraintes, x est le vecteur de variables de décision (ou variables d'optimisation) et f est l'objectif (ou la fonction de coût).

Si $C = \mathbb{R}^n$, on parle de problème d'optimisation sans contrainte, sinon on parle de problème sous contrainte.

En général, la résolution de ce type de problème peut aboutir à l'obtention d'un minimum local, et non au minimum global. Ainsi, une solution est rarement garantie comme étant optimale. Cependant, dans le cas où l'ensemble des solutions est convexe, on est assuré de l'obtention du minimum global. On notera que ce cas est rencontré lorsque f et C sont convexes. Ainsi, nous allons définir ce qu'est un ensemble convexe et une fonction convexe.

Définition : ensembles convexes

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble. E est dit convexe si :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y \in E$$

Cette définition est illustrée à la figure 2.1.

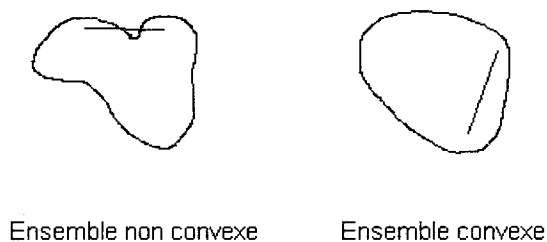


FIG. 2.1 *Exemple d'ensembles convexes et non convexes*

Définition : fonctions convexes

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ avec D convexe. La fonction f est dite convexe si :

$$\forall x \in D, \forall y \in D, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Cette définition est illustrée à la figure 2.2.

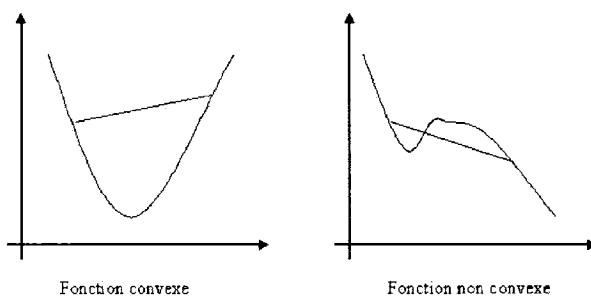


FIG. 2.2 *Exemple de fonctions convexes et non convexes*

Définition : inégalité matricielle linéaire

On appelle inégalité matricielle linéaire, une inégalité de la forme :

$$F(x) = F_0 + \sum_{k=1}^m F_k x_k < 0 \quad (2.2)$$

Où les F_k sont des matrices symétriques et les x_k sont des réels.

Cette inégalité est à comprendre au sens que $F(x)$ est une matrice définie négative.

Remarque :

Ce type d'inégalité est affine et non pas linéaire au sens propre. L'emploi du terme "linéaire" est un abus de langage provenant de la traduction littérale de "Linear Matrix Inequalities".

Définition : problème d'optimisation sous contrainte LMI

Un problème d'optimisation LMI est un problème où l'ensemble des contraintes est un ensemble de la forme :

$$C = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall \lambda \in \mathbb{R}^n - \{0\}, \lambda^T F(x) \lambda < 0\}.$$

Nous avons pris ici le cas particulier d'une négativité stricte. Celle-ci peut être remplacée par n'importe quel autre type d'inégalité.

Par abus de langage, nous emploierons l'acronyme LMI, ou la locution problème LMI, pour signifier problème d'optimisation sous contrainte LMI.

Comme on peut facilement le montrer, un tel ensemble de contraintes est convexe.

Dans les différents types de problèmes LMI rencontrés (c.f. (Scorletti, 2003), (Boyd, El Ghaoui, Feron, Balakrishnan, 2003), (Chadli, 2002)), on constate que les fonctions de coût sont toujours convexes. Ainsi, si on trouve une solution à ce type de problème, alors celle-ci est unique.

L'utilisation que nous ferons des LMI's se limite aux problèmes dit de faisabilité. Dans ce cas, nous cherchons à savoir si il existe un vecteur x qui vérifie l'inégalité $F(x) = F_0 + \sum_{k=1}^m F_k x_k < 0$. Cette question est implémentée dans Matlab sous la forme suivante (c.f. (Gahinet, Nemirovski, Laub, Chiladi, 1995)) :

$$\min_{x: F(x) < t.I} t \quad (2.3)$$

avec I la matrice identité.

Notons que nous sommes en présence d'un problème d'optimisation dont la fonction coût et l'ensemble des contraintes sont convexes. Ceci signifie que l'on peut répondre à ce problème d'existence de manière exacte. En effet, la valeur optimale obtenue pour t , notée t_{opt} , sera un minimum global. Ainsi, si t_{opt} est négatif, alors il existe x tel que $F(x) < 0$, sinon il n'en existe pas. Il nous est donc possible soit d'assurer qu'il existe une solution et nous sommes alors capable d'en donner une, soit d'affirmer avec certitude qu'il n'existe aucune solution à un tel problème.

C'est la recherche de cette certitude qui pousse à l'utilisation des LMI's. Dans ce but, des outils ont été développés pour ramener des questions non linéaires à des problèmes de type LMI. C'est le cas du lemme du complément de Schur qui a été utilisé au chapitre 1 lors de la présentation des méthodes LPV.

Complément de Schur :

On considère A , B et C trois matrices dépendant d'une variable $x \in \mathbb{R}^n$. On suppose A et B symétriques. Alors, les deux LMI's suivantes sont équivalentes :

1. $\begin{pmatrix} A(x) & C(x) \\ C(x)^T & B(x) \end{pmatrix} > 0$
2. $B(x) > 0$ et $A(x) - C(x)B(x)^{-1}C(x)^T > 0$

2.2 Utilisation faite dans le cadre de l'estimation de domaine de stabilité asymptotique.

Dans le contexte de l'estimation de domaines de stabilité asymptotique, nous allons être amenés à devoir savoir si deux ensembles sont inclus l'un dans l'autre. Ces ensembles sont de la forme suivante :

$$\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T A x + 2b^T x + c < 0\} \quad (2.4)$$

Ce problème n'est pas linéaire. Cependant, nous allons nous ramener à un problème de faisabilité LMI en utilisant un corollaire appelé S-procedure.

Corollaire : (Sturm, Zhang, 2001)

Soient F_1, F_2, \dots, F_q des fonctions quadratiques dépendant des variables $x \in \mathbb{R}^n$.

Alors la proposition (1) implique la proposition (2) :

1. il existe $\tau_2 \geq 0, \dots, \tau_q \geq 0$ tels que $F_1(x) - \sum_{k=2}^q \tau_k F_k(x) \geq 0$
2. $F_1(x) \geq 0, \forall x \neq 0_n$ tel que $F_k(x) \geq 0$ pour $k = 2, \dots, q$

Dans le cas $q = 1$, la réciproque est également vraie.

Illustration :

On cherche dans cet exemple à savoir si l'ensemble :

$$\epsilon_1 = \{x \in \mathbb{R} : f_1(x) = -x^2 + 4 \leq 0\}$$

est inclus dans l'ensemble :

$$\epsilon_2 = \{x \in \mathbb{R} : f_2(x) = -x^2 + 1 \leq 0 \text{ et } f_3(x) = -x^2 + x + 2 \leq 0\}.$$

Graphiquement, nous sommes en présence de la situation illustrée par le graphique 2.3.

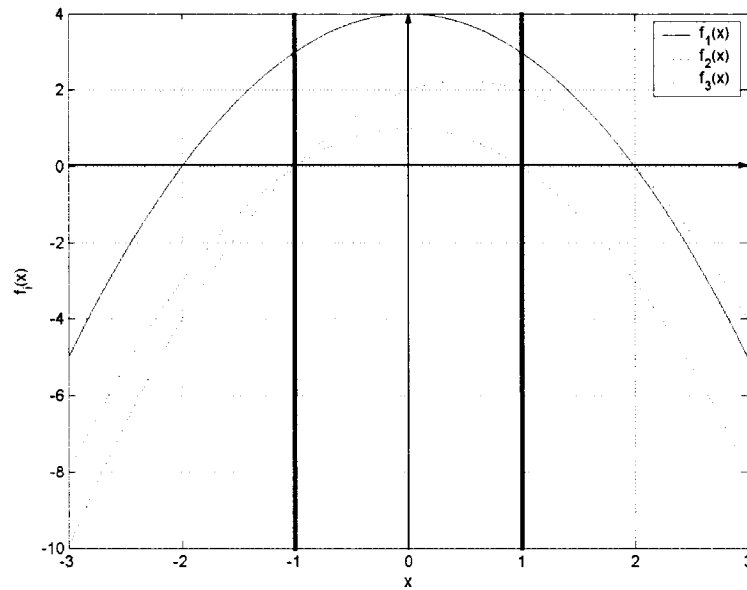


FIG. 2.3 *Illustration graphique de la S-procedure*

Nous pouvons donc affirmer que l'ensemble ϵ_1 est inclus dans l'ensemble ϵ_2 .

Nous aurions pu obtenir le même résultat en utilisant la S-procedure. En effet, en posant $\tau_2 = 1$ et $\tau_3 = 0.1$, on a :

$$F : x \rightarrow f_1(x) - \tau_2 f_2(x) - \tau_3 f_3(x) = 0.1x^2 - 0.1x + 2.8.$$

Une simple étude de fonction démontre la positivité de $F(x)$ sur \mathbb{R} .

Lorsque nous utiliserons ce corollaire, nous serons en présence du cas favorable pour lequel il y a équivalence entre les deux implications. Ainsi, en répondant au problème d'existence du réel $\tau \geq 0$, on pourra affirmer avec certitude si il y a inclusion ou non.

On posera les notations suivantes :

$$\epsilon_i = \{x \in \mathbb{R}^n : F_i(x) = x^T A_i x + 2b_i^T x + c_i < 0\} \text{ avec } i = 1, 2. \quad (2.5)$$

On cherchera à savoir si $\epsilon_1 \subset \epsilon_2$.

C'est à dire que nous chercherons l'existence d'un réel τ positif tel que :

$$x^T(\tau A_2 - A_1)x + 2(\tau b_2^T - b_1^T)x + \tau c_2 - c_1 \geq 0 \quad (2.6)$$

Afin de rendre ce problème implémentable, nous allons associer à chaque forme quadratique la matrice (c.f. (Sturm, Zhang, 2001)) :

$$M = \begin{pmatrix} c & b^T \\ b & A \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Il est important de noter que l'application qui transforme une forme quadratique en cette matrice est bijective de l'ensemble des fonctions quadratiques vers l'ensemble des matrices symétriques. Pour démontrer ce résultat, on utilise la linéarité de cette application. La surjectivité est triviale, et l'injectivité est alors aisément démontrable en constatant que le noyau de cette application est réduit à l'origine.

On est donc amené à vérifier si il existe τ tel que :

$$\begin{aligned} - & \begin{pmatrix} \tau c_2 - c_1 & \tau b_2^T - b_1^T \\ \tau b_2 - b_1 & \tau A_2 - A_1 \end{pmatrix} \geq 0 \\ - & \tau \geq 0 \end{aligned}$$

Ceci est réduit à une seule LMI en utilisant la propriété suivante :

Propriété :

Les deux ensembles de contraintes suivants sont équivalents :

1. $F_1(x) < 0, F_2(x) < 0, \dots, F_p(x) < 0$
2. $\text{diag}(F_1(x), F_2(x), \dots, F_p(x)) < 0$

où les $F_i(x) < 0$ sont des inégalités matricielles linéaires.

Savoir si ϵ_1 est inclus dans ϵ_2 revient donc à connaître l'existence de τ tel que :

$$\begin{pmatrix} \tau c_2 - c_1 & \tau b_2^T - b_1^T & 0 \\ \tau b_2 - b_1 & \tau A_2 - A_1 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix} \geq 0.$$

Nous allons illustrer ce résultat au travers de trois exemples. Le premier illustrera le cas d'inclusion totale, le second le cas d'inclusion partielle et le dernier le cas où il n'y a pas d'inclusion.

Exemple 1 : Cas d'inclusion totale

On se pose la question de savoir si l'ellipsoïde défini par :

$$\epsilon_1 = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 - \frac{3}{5} \leq 0\}$$

est inclus dans l'hyperboloïde définie par :

$$\epsilon_2 = \{(x, y) : 3x^2 + 3y^2 - 10xy - 2x + 14y - 13 \leq 0\}.$$

Ce problème se met sous la forme :

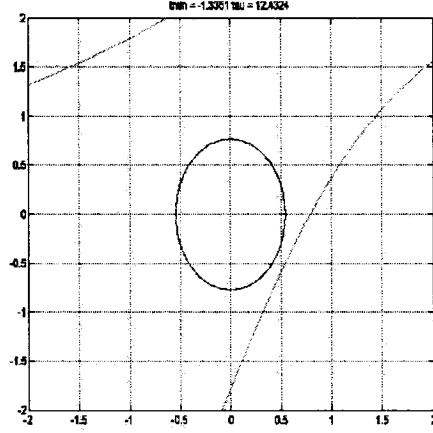
$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} + 13\tau & \tau & -7\tau & 0 \\ \tau & 1 - 3\tau & 5\tau & 0 \\ -7\tau & 5\tau & 2 - 3\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tau \end{pmatrix} \leq 0$$

En implémentant ce problème sous Matlab, on obtient :

$$tmin = -1.3351 \text{ et } \tau = 12.4324.$$

Ce problème est donc faisable, ce qui signifie que l'ellipsoïde est inclus dans l'hyperboloïde.

On peut vérifier graphiquement ce résultat :

FIG. 2.4 *Exemple 1 : Cas d'inclusion totale***Exemple 2 : Cas d'inclusion partielle**

On pose ici le même problème mais avec l'ellipsoïde suivant :

$$\{(x, y) : x^2 + 2y^2 - 4 \leq 0\} .$$

Ce problème se met sous la forme :

$$\begin{pmatrix} -4 + 13\tau & \tau & -7\tau & 0 \\ \tau & 1 - 3\tau & 5\tau & 0 \\ -7\tau & 5\tau & 2 - 3\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tau \end{pmatrix} \leq 0$$

Nous obtenons bien une valeur de τ positive mais une valeur de $tmin$ positive, ce qui signifie que le problème n'est pas faisable. L'ellipsoïde n'est donc pas inclus dans l'hyperboloïde.

On peut vérifier graphiquement ce résultat :

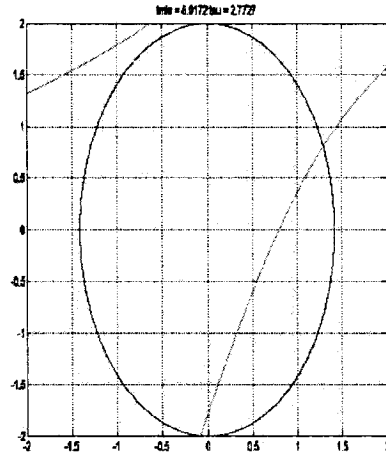


FIG. 2.5 *Exemple 2 : Cas d'inclusion partielle*

Exemple 3 : Cas de non inclusion

Toujours en prenant le même hyperboloïde mais on considère ici l'ellipsoïde suivant :

$$\{(x, y) : (x + 5)^2 + (y - 5)^2 - 4 \leq 0\} .$$

Nous obtenons les résultats suivants :

- $tmin = 6.647$.
- $\tau = 3.7201$

L'ellipsoïde n'est donc pas inclus dans l'hyperboloïde.

On peut vérifier graphiquement ce résultat :

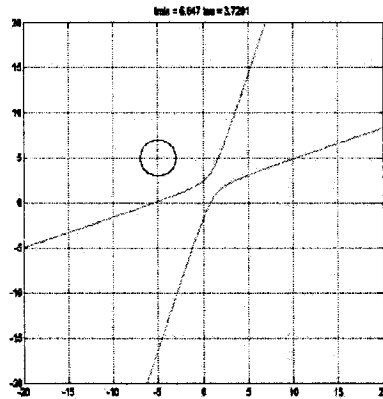


FIG. 2.6 *Exemple 3 : Cas de non inclusion*

2.3 Bilan

Nous avons présenté dans ce chapitre une technique permettant de tester l'inclusion d'ensembles de négativité de formes quadratiques. Nous aurons besoin de cet outil lors des chapitres suivant.

CHAPITRE 3

UTILISATION DES FONCTIONS DE LYAPUNOV ASSIGNABLES POUR LE SÉQUENCEMENT DE CONTRÔLEURS

Au cours de ce chapitre, nous allons aborder une première méthode de séquençement de contrôleur. Nous considérons un système non linéaire. Nous définissons un ensemble de points d'équilibre, noté E . Nous considérons un point de fonctionnement du système, noté $x_{objectif}$. Nous désirons concevoir une commande telle que toute trajectoire débutant dans E converge vers $x_{objectif}$.

La méthode présentée ici est issue de (McConley, Appelby, Dahleh, Feron, 2000). Celle-ci utilise les fonctions de Lyapunov assignables. Ce procédé s'applique à une classe restreinte de systèmes non linéaires. Les éléments permettant de définir cette catégorie seront présentés dans la suite et résumés à la fin de ce chapitre lors d'une discussion sur la méthode.

Dans un premier temps, nous allons définir les fonctions de Lyapunov assignables et en présenter la problématique. Nous présenterons ensuite l'algorithme de séquençement avant de discuter des limitations de la méthode.

3.1 Définition des fonctions de Lyapunov assignables et problématique

Dans le cadre des fonctions de Lyapunov assignables, nous allons considérer une classe restreinte de systèmes non linéaires. Nous allons nous limiter aux cas des systèmes affines en la commande, c'est à dire des systèmes pouvant s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u. \quad (3.1)$$

Où u est le vecteur de commandes, x est le vecteur d'états, f et g sont des fonctions de classe C^∞ .

Ceci n'est pas une restriction de la classe des systèmes non linéaires pour lesquels la méthode est applicable. En effet, nous pouvons toujours nous ramener à cette forme en incluant la commande u dans le vecteur d'états et en posant pour nouvelle commande $v = \dot{u}$.

Pour ce type de système, nous allons définir les fonctions de Lyapunov assignables (ou CLF pour "Control Lyapunov Function") et, par extension, les fonctions de Lyapunov assignables sur un ensemble.

Définition : Fonction de Lyapunov assignable(Faubourg, Pomet, 1999)

Soit V une fonction définie positive. On dit qu'une loi de commande $u(x)$ assigne V à être de Lyapunov pour le système en boucle fermée si la dérivée de V le long des trajectoires est définie négative.

Ceci se traduit par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}, L_f V(x) + L_g V(x)u(x) < 0, \quad (3.2)$$

où $L_f V(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$ et $L_g V(x) = \frac{\partial V}{\partial x} g(x)$.

Si une telle loi de commande existe, on dit que V est une fonction de Lyapunov assignable.

Entre autre, une telle loi de commande existe si on arrive à déterminer une fonction V définie positive telle que (c.f. (Tan, Packard, 2003)) :

$$L_f V(x) < 0, \forall x : L_g V(x) = 0.$$

Cela revient à dire que \dot{V} doit être négative partout où la commande ne peut agir sur sa négativité.

Remarque :

L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n : L_g V(x) = 0\}$ est appelé noyau de commandabilité.

Exemple simple de fonction de Lypunov assignable :

On considère le système dont la dynamique est régie par l'équation :

$$\dot{x} = -x + (1 + x)u. \tag{3.3}$$

Dans ce cas, $f(x) = -x$ et $g(x) = (1 + x)$.

La fonction $V(x) = x^2$ est une fonction de Lyapunov assignable.

En effet, $L_g V(x) = 2x(1 + x)$. Donc le noyau de commandabilité est constitué des points $x = 0$ et $x = -1$. Or $L_f V(x) = -2x^2$. Donc pour tout point du noyau de commandabilité, $L_f V(x)$ est négative.

Remarque : Définition d'un fonction de Lyapunov localement assignable

Si il existe un ensemble Ω telle que $\forall x \in \Omega, L_f V(x) + L_g V(x)u(x) < 0$, alors la fonction V sera dite assignable sur Ω .

Dans le cas de la méthode proposée par (McConley, Appelby, Dahleh, Feron, 2000), on cherche un ensemble Ω de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c\}$ tel que V soit assignable dessus.

Lorsque nous sommes assurés de l'assignabilité d'une fonction V , il reste à déterminer une loi de commande qui assigne V à être de Lyapunov. A cette fin, on peut adopter pour commande celle donnée par Sontag (Sontag, 1990) :

$$u_k = \begin{cases} -\frac{a + \sqrt{a^2 + \left(\sum_{i=1}^m b_i^2\right)^2}}{\sum_{i=1}^m b_i^2} b_k, & \text{si } b_k \neq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.4)$$

où $a = L_f V(x)$ et b_k est la k -ième composante du vecteur $L_g V(x)$.

Sontag (Sontag, 1990) montre que cette commande assure la stricte négativité de \dot{V} partout où $L_g V(x) \neq 0$.

Exemple :

On reprend l'exemple du système $\dot{x} = -x + (1+x)u$. En appliquant la formule 3.4, on obtient la commande :

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x(1 - \sqrt{1 + 4(1+x)^4})}{1+x}, & \text{si } x \in \mathbb{R} - \{-1, 0\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Avec cette commande, on obtient :

$$L_f V(x) + L_g V(x)u(x) = \begin{cases} -\sqrt{1+4(1+x)^4}, & \text{si } x \in \mathbb{R} - \{-1, 0\} \\ -x^2 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.6)$$

Ainsi, on peut vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}, L_f V(x) + L_g V(x)u(x) < 0$.

Cette commande assigne donc V à être de Lyapunov.

Si la matrice jacobienne A du système en un point d'équilibre (X_e, U_e) est Hurwitz, on peut trouver une fonction de Lyapunov localement assignable en résolvant l'équation :

$$A^T P + P A = -Q, \quad (3.7)$$

et en choisissant $V(x) = (x - X_e)^T P (x - X_e)$. En effet, cette formule assure la stricte négativité de \dot{V} dans un voisinage autour de X_e . Ceci est donc vrai entre autre pour les points de ce voisinage tels que $L_g V(x) = 0$.

L'objectif de la méthode présentée est de déterminer $c > 0$, telle que la fonction $V(x) = (x - X_e)^T P (x - X_e)$ soit assignable sur l'ensemble $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c\}$. Ainsi, en appliquant la commande donnée par 3.4, toute trajectoire débutant dans Ω rejoindra le point d'équilibre X_e .

Par la suite, sans perte de généralité, on pose $X_e = 0$.

3.2 Mise en forme du système

La première chose à effectuer pour résoudre ce problème est de réorganiser le vecteur d'états. En effet, on peut différentier les états comportant les non linéarités de ceux

dit linéaires. Les états dits linéaires sont les états qui interviennent dans le modèle d'état uniquement sous la forme $\phi(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)x_k$, où ϕ est une fonction des états autres que celui considéré. Ainsi, cette expression est linéaire en x_k . Les autres états sont dits non linéaires.

Il est à noter que tous les états intervenant dans $g(x)$ sont classés comme étant non linéaires. En effet, par la suite, on effectuera un retour d'états de la forme $-Kx$ pour assurer la stabilité asymptotique du système autour de l'origine. Ce retour est susceptible de faire intervenir tous les états, et on travaillera sur ce système en boucle fermée pour déterminer l'ensemble sur lequel une fonction de Lyapunov est assignable. On obtiendra alors une expression de la forme $g(x_g)Kx$, où x_g sont les états intervenant dans g . Nous considérons ici le cas où les gains relatifs aux états de x_g sont non nuls. Ainsi le retour d'états rend ces états non linéaires.

On reclasse alors les états comme suit :

$$x = \begin{pmatrix} x_n \\ x_l \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

avec x_n les états comportant les non linéarités du système et x_l les états dit linéaires.

Une fois cette décomposition faite, on peut exprimer le système sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_n \\ \dot{x}_l \end{pmatrix} = f(x_n) + A(x_n)x_l + g(x_n)u, \quad (3.9)$$

où f et g sont des fonctions de classe C^∞ et $A(x_n)$ est une matrice de $\mathbb{R}^{n \times \dim(x_l)}$.

Exemple :

On considère le système suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3 x_2^2, \\ \dot{x}_3 &= x_1 u,\end{aligned}\tag{3.10}$$

où $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ est le vecteur d'états et u la commande.

L'état x_1 est non linéaire à cause du terme $x_1 u$. En effet, si nous désirons stabiliser asymptotiquement le système autour de l'origine et que nous effectuons un retour d'états linéaire faisant intervenir x_1 , alors ce terme deviendra quadratique en x_1 . L'état x_2 est aussi non linéaire à cause du terme $x_3 x_2^2$. L'état x_3 est dit linéaire. Ainsi, on pose $x_n = [x_1 \ x_2]^T$ et $x_l = x_3$. On obtient une forme similaire à 3.9 en posant :

$$f(x_n) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A(x_n) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g(x_n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Afin de s'assurer de l'existence d'une fonction de Lyapunov assignable, on effectue un retour d'états linéaire pour stabiliser asymptotiquement le système autour de l'origine. A cette fin, on linéarise le système autour de ce point. On obtient ainsi les matrices jacobienues de $f(x_n) + A(x_n)x_l$ et $g(x_n)$, que l'on notera respectivement A et B . On suppose que le système est commandable, ce qui permet de placer les pôles du système par retour d'états. On note le gain K . Une fois l'origine stabilisée

asymptotiquement, on définit la fonction de Lyapunov en résolvant l'équation :

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -Q, \quad (3.11)$$

avec Q une matrice symétrique définie positive. Nous obtenons ainsi la fonction de Lyapunov $V(x) = x^T P x$. En posant $K = [K_n \ K_l]$ (K_n sont les gains assurant le retour des états non linéaires et K_l ceux assurant le retour des états linéaires), le système en boucle fermée a pour expression :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_n \\ \dot{x}_l \end{pmatrix} = (f(x_n) - g(x_n)K_n x_n) + (A(x_n) - g(x_n)K_l)x_l + g(x_n)u.$$

Pour plus de commodité, on prend comme notations pour ce système en boucle fermée :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_n \\ \dot{x}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n(x_n) \\ f_l(x_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_n(x_n) \\ A_l(x_n) \end{pmatrix} x_l + \begin{pmatrix} g_n(x_n) \\ g_l(x_n) \end{pmatrix} u.$$

On décompose P comme suit :

$$P = \begin{pmatrix} P_{nn} & P_{nl} \\ P_{ln} & P_{ll} \end{pmatrix},$$

où l'on a utilisé des notations triviales.

Ainsi :

$$V(x) = x_n^T P_{nn} x_n + 2x_n^T P_{nl} x_l + x_l^T P_{ll} x_l \quad (3.12)$$

$$L_g V(x) = 2x_n^T (P_{nn} g_n(x_n) + P_{nl} g_l(x_n)) + 2x_l^T Y(x_n) \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} L_{\tilde{f}} V(x) &= 2x_n^T (P_{nn} f_n(x_n) + P_{nl} f_l(x_n)) \\ &+ 2(x_n^T (P_{nn} A_n(x_n) + P_{nl} A_l(x_n)) + f_n^T(x_n) P_{nl} + f_l^T(x_n) P_{ll}) x_l \\ &+ 2x_l^T (A_n^T(x_n) P_{nl} + P_{ll} A_l(x_n)) x_l \end{aligned} \quad (3.14)$$

Avec $\tilde{f}(x_n, x_l) = f(x_n) + A(x_n)x_l$ et $Y(x_n) = P_{ln}g_n(x_n) + P_{ll}g_l(x_n)$.

La mise en place de ces notations va nous permettre de déterminer une constante $c > 0$ telle que V soit assignable sur $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c\}$. En effet, grâce à la paramétrisation de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n : L_g V(x) = 0\}$, appelé noyau de commandabilité, présentée lors de la prochaine section, nous allons ramener la question d'assignabilité de V sur Ω à un ensemble de problèmes d'inclusion solvables en utilisant la S-procedure.

3.3 Paramétrisation du noyau de commandabilité

Afin de savoir si V est une fonction de Lyapunov assignable sur l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c\}$, il faut vérifier si :

$$\forall x \in \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c\} \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n : L_g V(x) = 0\}, L_{\tilde{f}} V(x) \leq 0 \quad (3.15)$$

Dans ce qui suit, n est la dimension du système, k est le nombre d'états non linéaires et m est le nombre de commandes. Nous nous intéressons à des systèmes qui ont plus d'états linéaires que de commandes. Nous verrons la raison de cette restriction ultérieurement.

La vérification de cette inégalité est facilitée par la paramétrisation de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n : L_g V(x) = 0\}$. En effet, comme la montre le théorème de McConley, Appelby Dahleh et Feron cité ultérieurement, les états appartenant à cet ensemble peuvent être mis sous la forme :

$$x = \begin{pmatrix} x_n \\ G(x_n)\lambda + \rho(x_n) \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

où $G(x_n) \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k-m)}$, $\lambda \in \mathbb{R}^{n-k-m}$ et $\rho(x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$.

En utilisant cette paramétrisation, vérifier l'inégalité 3.15 revient à tester l'inclusion de deux ensembles de la forme :

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x^T A x + 2b^T x + c < 0\}.$$

En effet, si on remplace x_i par $G(x_n)\lambda + \rho(x_n)$ dans 3.12 et 3.14, $L_{\tilde{f}}V$ est quadratique en λ et $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : L_g V(x) = 0\}$ peut être mis sous la forme :

$$\{x_n \in \mathbb{R}^{n-k}, \lambda \in \mathbb{R}^{n-k-m} : \lambda^T \tilde{A}(x_n)\lambda + \tilde{c}(x_n)\}.$$

$\tilde{A}(x_n)$ et $\tilde{c}(x_n)$ sont respectivement une matrice et un réel qui vont être définis par la suite. Ainsi, vérifier 3.15 se ramène à un cas de S-procedure pour chaque valeur de x_n .

On suppose que la matrice $Y(x_n) = P_{lg}g_n(x_n) + P_{ll}g_l(x_n)$ ($Y(x_n) \in \mathbb{R}^{(n-k) \times m}$) est de rang m . Ceci est une restriction majeure de la méthode présentée. En effet, ceci implique que nous sommes en présence d'un système ayant moins de commandes que d'états linéaires. Sous cette hypothèse, on a le théorème suivant :

Théorème : (McConley, Appelby, Dahleh, Feron, 2000)

Il est possible de paramétrer le noyau de commandabilité comme suit :

$$\{x \in \mathbb{R}^n : L_g V(x) = 0\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_n \\ G(x_n)\lambda - P_{ll}^{-1}P_{ln}x_n - \xi(x_n) \end{pmatrix}, x_n \in \mathbb{R}^k, \lambda \in \mathbb{R}^{n-k-m} \right\}$$

pour tout vecteur $\xi(x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$ et matrice $G(x_n) \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k-m)}$ de rang plein (c'est-à-dire $n - k - m$) tels que :

$$Y^T(x_n)\xi(x_n) = g_n^T(x_n)Rx_n, \quad (3.17)$$

$$R = P_{nn} - P_{nl}P_{ll}^{-1}P_{ln}, \quad (3.18)$$

$$Y^T(x_n)G(x_n) = 0. \quad (3.19)$$

Ainsi, en supposant $\xi(x_n)$ calculable et en remplaçant x_l par :

$$G(x_n)\lambda - P_{ll}^{-1}P_{ln}x_n - \xi(x_n),$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} & \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : L_g V(x) = 0\} = \\ & \left\{ \begin{pmatrix} x_n \\ \lambda \end{pmatrix} : (x_n^T Rx_n + \xi^T(x_n)P_{ll}\xi(x_n)) + \lambda^T G^T(x_n)P_{ll}G(x_n)\lambda < c \right\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

McConley, Appelby, Dahleh et Feron proposent pour expression de $\xi(x_n)$:

$$\xi(x_n) = P_{ll}^{-1}Y(x_n)[Y(x_n)^T P_{ll}^{-1}Y(x_n)]^{-1}(g_n^T(x_n)Rx_n). \quad (3.21)$$

On peut vérifier que cette expression satisfait 3.17. En effet :

$$Y^T(x_n)\xi(x_n) = Y^T(x_n)P_{ll}^{-1}Y(x_n)[Y(x_n)^T P_{ll}^{-1}Y(x_n)]^{-1}(g_n^T(x_n)Rx_n),$$

et donc :

$$Y^T(x_n)\xi(x_n) = g_n^T(x_n)Rx_n.$$

Par ailleurs, en remplaçant x_l par $G(x_n)\lambda - P_{ll}^{-1}P_{ln}x_n - \xi(x_n)$ dans 3.14 , on obtient pour expression de $L_{\hat{f}}V(x_n, x_l)$:

$$L_{\hat{f}}V(x_n, \lambda) = \gamma(x_n) + 2\beta^T(x_n)\lambda + \lambda^T\alpha(x_n)\lambda. \quad (3.22)$$

Où :

$$\begin{aligned} \gamma(x_n) &= 2x_n^T(P_{nn}f_n(x_n) + P_{nl}f_l(x_n)) \\ &+ 2(x_n^T(P_{nn}A_n(x_n) + P_{nl}A_l(x_n)) + f_n^T(x_n)P_{nl} + f_l^T(x_n)P_{ll})\rho(x_n) \\ &+ 2\rho^T(x_n)(A_n^T(x_n)P_{nl} + P_{ll}A_l(x_n))\rho(x_n) \\ \beta^T(x_n) &= (x_n^T(P_{nn}A_n(x_n) + P_{nl}A_l(x_n)) + f_n^T(x_n)P_{nl} + f_l^T(x_n)P_{ll})G(x_n) \\ &+ \rho^T(x_n)((A_n^T(x_n)P_{nl} + P_{ll}A_l(x_n)) + (A_n^T(x_n)P_{nl} + P_{ll}A_l(x_n))^T)G(x_n) \\ \alpha(x_n) &= G^T(x_n)(A_n^T(x_n)P_{nl} + P_{ll}A_l(x_n))G(x_n) \end{aligned}$$

avec :

$$\rho(x_n) = -P_{ll}^{-1}P_{ln}x_n - \xi(x_n).$$

Ainsi vérifier 3.15 revient à tester pour tout x_n tel que l'ensemble :

$$\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c\}$$

est non vide si l'ensemble :

$$\{\lambda \in \mathbb{R}^{n-k-m} : (x_n^T R x_n + \xi^T(x_n) P_{ll} \xi(x_n)) + \lambda^T G^T(x_n) P_{ll} G(x_n) \lambda < c\}$$

est inclus dans l'ensemble :

$$\{\lambda \in \mathbb{R}^{n-k-m} : \gamma(x_n) + 2\beta^T(x_n)\lambda + \lambda^T \alpha(x_n)\lambda \leq 0\}.$$

Il suffit alors pour chaque x_n admissible (c'est à dire tel que $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c\}$ est non vide) d'utiliser la S-procedure pour vérifier une telle inclusion.

Illustration : exemple du pendule simple

On considère un pendule simple dont le couple autour de l'axe est exercé via un moteur électrique. La dynamique de ce système est régie par les équations différentielles suivantes :

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} - \sin(\theta) = u \tag{3.23}$$

$$\dot{u} = -u + u_c \tag{3.24}$$

Où θ est l'angle que fait le pendule avec la verticale ascendante, u est le couple exercé autour de l'axe et u_c est la commande du moteur.

Le modèle d'état de ce système est donné par les équations suivantes :

$$\dot{x}_2 = \sin(x_1) - x_2 + x_3 \quad (3.25)$$

$$\dot{x}_3 = -x_3 + u_c \quad (3.26)$$

Où on a posé $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [\theta \ \dot{\theta} \ u]^T$.

On remarque que $x_n = x_1$ et que $x_l = [x_2 \ x_3]^T$. Le système ne possédant qu'une seule commande, on peut vérifier qu'il y a plus d'états linéaires que de commande.

La méthode est donc applicable à ce système. Ainsi :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(x_1) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_c$$

On s'intéresse à la position d'équilibre définie par $\theta = 0$ (position haute du pendule). Cette position est instable, comme le montre la linéarisation du système autour de ce point. En effet, on obtient pour matrices jacobiniennes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Afin de stabiliser le système autour de cette position d'équilibre, on effectue un

retour d'état en plaçant les pôles en $[-0.1 \quad -1+j \quad -1-j]^T$. On obtient $K = [1.3 \quad 2.1 \quad 0.1]$.

En résolvant l'équation de Lyapunov en prenant l'identité pour Q , on obtient pour fonction $V(x) = x^T P x$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} 26.2692 & 10 & 8.0769 \\ 10 & 4.4423 & 2.8846 \\ 8.0769 & 2.8846 & 3.0769 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le noyau de commandabilité est défini par l'ensemble des états tels que :

$$L_g V(x) = x^T P g = 0. \quad (3.27)$$

C'est-à-dire l'ensemble des états tels que :

$$8.0769x_1 + 2.8846x_2 + 3.0769x_3 = 0. \quad (3.28)$$

On peut alors vérifier le théorème de McConley, Appelby, Dahleh et Feron.

Dans cet exemple :

$$Y = \begin{pmatrix} 2.8846 \\ 3.0769 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en résolvant $Y^T G = 0$ avec $G \in \mathbb{R}^2$, on obtient :

$$G = \begin{pmatrix} -1.0667 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des états linéaires appartenant au noyau de commandabilité peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.0667\lambda - 1.397x_1 \\ \lambda - 1.3154x_1 \end{pmatrix},$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

En remplaçant dans 3.28, x_2 et x_3 par leur expression en fonction de λ et x_1 , on peut vérifier le bien fondé de cette paramétrisation. En effet :

$$\forall (x_1, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, 8.0769x_1 + 2.8846(-1.0667\lambda - 1.397x_1) + 3.0769(\lambda - 1.3154x_1) = 0.$$

En utilisant la paramétrisation, on obtient :

$$V(x_1, \lambda) = 1.6757x_1^2 + 1.9776\lambda^2, \quad (3.29)$$

et :

$$\begin{aligned} L_{\tilde{f}}V(x_1, \lambda) &= (-2.3406x_1^2 - 3.2692 \cdot 10^{-4}x_1 \sin(x_1)) \\ &+ (1.6792x_1 - 1.854 \sin(x_1))\lambda \\ &- 1.0689\lambda^2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Savoir si V est assignable sur $\{x \in \mathbb{R}^3 : V(x) < c\}$ (avec $c > 0$ à choisir), revient à tester, pour chaque valeur de x_1 telle que $\{\lambda \in \mathbb{R} : V(x_1, \lambda) < c\}$ est non vide, l'inclusion de $\{\lambda \in \mathbb{R} : V(x_1, \lambda) < c\}$ dans $\{\lambda \in \mathbb{R} : L_{\tilde{f}}V(x_1, \lambda) < 0\}$.

On choisit arbitrairement $c = 1$. Ainsi, l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{R} : V(x_1, \lambda) < 1\}$ est non

vide pour toute valeur $x_1 \in]-0.7725; 0.7725[$.

On effectue alors un quadrillage du segment $]-0.7725; 0.7725[$, et on teste l'inclusion pour chacune des valeurs de ce quadrillage. Si toutes les inclusions sont vérifiées, alors V est assignable sur $\{x \in \mathbb{R}^3 : V(x) < 1\}$. Si une seule des inclusions n'est pas vérifiée alors V n'est pas assignable sur $\{x \in \mathbb{R}^3 : V(x) < 1\}$.

On vérifie ainsi que V est assignable sur $\{x \in \mathbb{R}^3 : V(x) < 1\}$.

3.4 Algorithmes

3.4.1 Construction d'une fonction de Lyapunov assignable sur un ensemble plus vaste

Au cours de la sous section précédente, nous avons vu comment construire une fonction de Lyapunov assignable sur des ellipsoïdes définis par $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c\}$. Nous allons voir ici comment construire une fonction de Lyapunov assignable sur une union d'ellipsoïdes. Ceci demande une nouvelle restriction quant à l'ensemble des systèmes non linéaires pour lesquels la méthode est applicable.

Considérons deux points d'équilibre distincts que nous noterons x_{1e} et x_{2e} .

Supposons que nous ayons trouvé deux matrices définies positives P_1 et P_2 et deux réels positifs c_1 et c_2 tels que :

- $V_1(x) = (x - x_{1e})^T P_1 (x - x_{1e})$ soit assignable sur $E(c_1) = \{x \in \mathbb{R}^n : V_1(x) < c_1\}$,
- $V_2(x) = (x - x_{2e})^T P_2 (x - x_{2e})$ soit assignable sur $E(c_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : V_2(x) < c_2\}$,
- $x_{2e} \in E(c_1)$.

On définit alors la fonction V comme suit :

$$V(x) = \begin{cases} V_1(x), & \forall x \in E(c_1) \\ V_2(x), & \forall x \in E(c_2) - E(c_1) \end{cases} \quad (3.31)$$

V ainsi définie est assignable sur $E(c_1) \cup E(c_2)$. En effet, on note $u_1(x)$ une commande qui assigne V_1 à être de Lyapunov sur $E(c_1)$ et $u_2(x)$ une commande qui assigne V_2 à être de Lyapunov sur $E(c_2)$. On définit alors la commande $u(x)$ comme suit :

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & \forall x \in E(c_1) \\ u_2(x), & \forall x \in E(c_2) - E(c_1) \end{cases} \quad (3.32)$$

On peut alors constater que la commande $u(x)$ et la fonction V ainsi définies vérifient :

$$\forall x \in E(c_1) \cup E(c_2), L_f V(x) + L_g V(x)u(x) < 0.$$

Ceci qui prouve l'assignabilité de V sur $E(c_1) \cup E(c_2)$ et donne une expression de la commande qui assigne V à être de Lyapunov sur cet ensemble.

En appliquant cette méthode, nous effectuons un séquençement de contrôleurs dans le sens où nous commutons entre deux lois de commande. Ainsi, cette technique peut être incluse dans l'ensemble des méthodes de séquençement de gains.

Néanmoins, rien ne garantit a priori l'existence d'un point d'équilibre x_{2e} appartenant à l'ensemble $E(c_1)$ et distinct de x_{1e} . Cependant, si l'ensemble des points d'équilibre est connexe et non réduit à un point, on est assuré de l'existence d'un tel point. Rappelons ici la définition de la connexité :

Définition : ensemble connexe

Soit Γ un ensemble. Γ est dit connexe si pour tout couple de points $\{p_1, p_2\}$ de Γ , il existe une courbe continue de points de Γ qui joint p_1 à p_2 .

Ceci est illustré graphiquement par la figure 3.1.

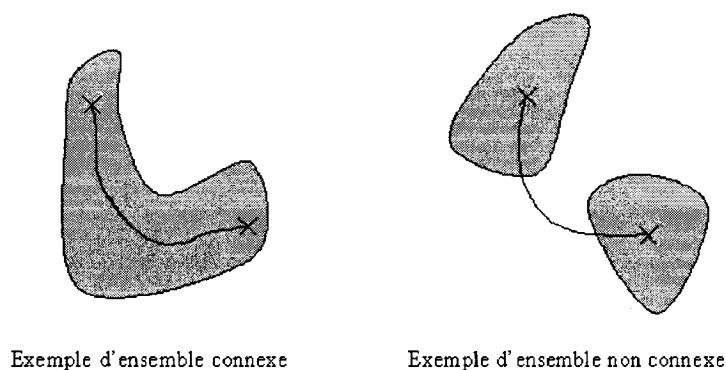


FIG. 3.1 *Exemple d'ensemble connexe et non connexe*

On peut démontrer que la connexité et la non trivialité de l'ensemble des points d'équilibre assure l'existence d'autres points d'équilibre dans $E(c_1)$.

En effet, supposons que l'ensemble des points d'équilibre soit connexe et non réduit à un seul point. Supposons de plus qu'il n'existe pas d'autres points d'équilibre dans $E(c_1)$.

Soit x_{2e} un point d'équilibre distinct de x_{1e} . L'existence de x_{2e} est assurée par la non trivialité de l'ensemble des points d'équilibre.

Etant donné qu'il n'existe pas d'autres points d'équilibre dans $E(c_1)$, on peut affirmer qu'il existe une boule autour de x_{1e} telle qu'il n'y a aucun points d'équilibre. Il ne peut donc pas exister de courbe continue composée de points d'équilibre qui joigne x_{1e} et x_{2e} .

Ceci est contraire à l'hypothèse de connexité.

Exemple : suite du pendule simple

On reprend l'exemple du pendule simple. Dans ce cas, l'ensemble des points d'équilibre est défini par $\{(x, u_c) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} : x_2 = 0 \text{ et } u_c = x_3 = -\sin(x_1)\}$. La connexité de cet ensemble est assurée par la continuité de la fonction sinus sur \mathbb{R} . De plus, cet ensemble n'est pas restreint à un seul point. Il existe donc un point d'équilibre différent de l'origine qui soit élément de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^3 : V(x) < 1\}$.

Rappelons que nous avons obtenu pour V la fonction $V_1 : x \rightarrow x^T P_1 x$, avec :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 26.2692 & 10 & 8.0769 \\ 10 & 4.4423 & 2.8846 \\ 8.0769 & 2.8846 & 3.0769 \end{pmatrix}.$$

Le point $x_{2e} = [\frac{\pi}{12} \ 0 \ -\sin(\frac{\pi}{12})]$ est un point d'équilibre.

De plus, $x_{2e}^T P_1 x_{2e} = 0.912 < 1$. Donc, $x_{2e} \in \{x \in \mathbb{R}^3 : V_1(x) < 1\}$. Ce point peut donc être choisi comme prochain point de linéarisation.

On définit la fonction $V_2 : x \rightarrow (x - x_{2e})^T P_2 (x - x_{2e})$, avec :

$$P_2 = \begin{pmatrix} 24.8783 & 9.5732 & 7.7203 \\ 9.5732 & 4.3122 & 2.7886 \\ 7.7203 & 2.7886 & 2.9896 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la même procédure que pour V_1 , on montre que V_2 est assignable sur $\{x \in \mathbb{R}^3 : V_2(x) < 1\}$.

On définit la fonction V comme suit :

$$V(x) = \begin{cases} V_1(x), & \forall x \in \{x \in \mathbb{R}^3 : V_1(x) < 1\} \\ V_2(x), & \forall x \in \{x \in \mathbb{R}^3 : V_2(x) < 1 \text{ et } V_1(x) \geq 1\} \end{cases} \quad (3.33)$$

V ainsi définie est assignable sur $\{x \in \mathbb{R}^3 : V_1(x) < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R}^3 : V_2(x) < 1\}$.

On doit alors renouveler la procédure autant de fois que nécessaire pour que la fonction V ainsi construite soit assignable sur une union d'ellipsoïdes incluant l'ensemble des points d'équilibre désiré.

L'union des ellipsoïdes ainsi définis représente un domaine de stabilité asymptotique pour l'origine. En effet, toute trajectoire débutant dans cet union convergera vers l'origine via la commande construite par ce procédé.

Cette procédure d'extension peut être schématisée par la figure 3.2.

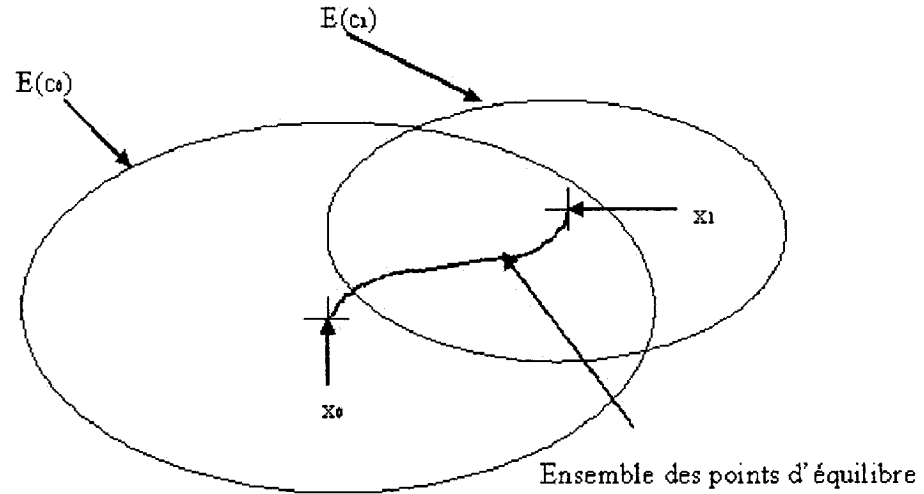


FIG. 3.2 *Illustration graphique de la procédure*

3.4.2 Choix de la constante $c > 0$

Nous désirons obtenir une constante $c > 0$ la plus grande possible telle que V soit assignable sur $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c\}$. En effet, ceci permet de réduire le nombre de changement de loi de commande et donc le nombre de commutations. A cet fin, on procède par dichotomie. Cette procédure se fait en deux temps. Le premier temps est l'initialisation de la dichotomie.

Nous commençons par chercher deux constantes positives, notées c_{sup} et c_{inf} . c_{sup} est définie telle que V ne soit pas assignable sur $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c_{sup}\}$. c_{inf} est définie telle que V soit assignable sur $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c_{inf}\}$.

Nous sommes assurés de l'existence de c_{inf} . En effet, au cours de la procédure précédemment expliquée, nous effectuons un placement de pôles pour la linéarisation du système autour du point d'équilibre considéré. Ainsi, par construction de V , il existe une boule autour de ce point d'équilibre telle que \dot{V} soit strictement négative. Donc, $L_{\bar{f}}V(x)$ est strictement négative sur un voisinage du point d'équilibre. Ceci prouve l'existence de c_{inf} .

Quant à l'existence de c_{sup} , elle n'est pas assurée dans le cas où V est assignable sur tout l'espace d'état. Dans ce cas, les objectifs relatifs à la commande sont obligatoirement atteints. Donc la procédure d'optimisation de la constante c devient absurde. Nous supposons pour la suite que V est assignable localement. Ainsi, c_{sup} existe. De plus, dans ce cas il existe une valeur limite de c , notée c_{lim} , telle que V soit assignable sur $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c_{lim}\}$ et pour tout $c > c_{lim}$, V n'est pas assignable sur $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c\}$.

Une fois c_{sup} et c_{inf} obtenus, on considère la constante $c_{inter} = (c_{sup} + c_{inf})/2$. On vérifie alors si V est assignable sur $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c_{inter}\}$. Si c'est la cas, on prend c_{inter} pour nouvelle valeur de c_{inf} et on garde l'ancienne valeur de c_{sup} , sinon

on pose $c_{sup} = c_{inter}$ et on garde l'ancienne valeur de c_{inf} . On recommence alors le test avec les nouvelles valeurs de c_{inf} et c_{sup} ainsi obtenues. D'itération en itération, c_{inf} se rapproche ainsi de plus en plus de la valeur de c_{lim} .

Néanmoins, il faudrait un nombre infini d'itérations pour atteindre la valeur c_{lim} . Nous devons donc poser une condition d'arrêt afin que l'algorithme ait une fin. Nous prenons arbitrairement pour condition d'arrêt, un test de la forme $c_{sup} - c_{inf} < test$, avec $test$ un valeur numérique. Ce choix de test d'arrêt n'est pas forcément le meilleur, néanmoins il donne des résultats satisfaisant pour les simulations que nous avons effectuées lors du chapitre 5.

Ainsi, on obtient une constante c raisonnablement grande telle que V soit assignable sur $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c\}$.

3.5 Bilan et discussion

Nous désirons construire une commande répondant à la problématique suivante :

Soit un ensemble de points d'équilibre, noté E . Soit un point de fonctionnement du système, noté $x_{objectif}$. Nous désirons concevoir une commande telle que toute trajectoire débutant dans E converge vers $x_{objectif}$.

Nous avons présenté ici un moyen de définir une fonction V assignable sur une union d'ellipsoïdes. Nous sommes aussi en mesure de déterminer une loi de commande qui assigne V à être de Lyapunov sur cette union. Cette commande répondra à l'objectif fixé si E est inclus dans l'union de ces ellipsoïdes.

Nous allons résumer ici les différentes restrictions effectuées quant à l'ensemble des systèmes non linéaires pour lesquels la méthode est applicable.

Afin de nous assurer de l'existence d'une fonction de Lyapunov assignable, nous avons considéré que le système était commandable pour tout les points d'équilibre autour desquels nous linéarisons le système.

Ensuite, nous avons du restreindre l'ensemble de ces systèmes à ceux dont le noyau de commandabilité est paramétrable via le théorème présenté par McConley, Appelby, Dahleh et Feron (McConley, Appelby, Dahleh, Feron, 2000). Ainsi, nous considérons des systèmes dont le nombre d'états linéaires est supérieur au nombre de commandes.

Enfin, pour assurer l'existence d'autres points d'équilibre dans l'ensemble sur lequel la fonction V est assignable, nous avons considéré des systèmes dont l'ensemble des points d'équilibre était non trivial et connexe.

Pour l'ensemble de ces systèmes, cette méthode nous permet de calculer une loi de commande et un ensemble tels que toute trajectoire débutant dans cet ensemble converge vers le point d'équilibre désiré.

On note E l'ensemble des points d'équilibre fixé comme objectif. On note $E(c_i)$ les ellipsoïdes tels que V soit assignable à être de Lyapunov sur leur union. De plus, on suppose que $E \subset \bigcup E(c_i)$.

On classe ces ellipsoïdes par ordre de proximité de leur centre (noté x_{ie}) par rapport au point d'équilibre désiré. Lorsque les états du systèmes sont dans l'intersection de plusieurs ellipsoïdes, nous appliquons la commande relative à l'ellipsoïde ayant l'indice le plus petit. On note $u_i(x)$ une commande qui assigne V_i à être de Lyapunov sur $E(c_i)$. Ainsi, si les états du systèmes appartiennent à l'intersection de $E(c_i)$ et de $E(c_{i+1})$, on applique la commande $u_i(x)$.

Les commandes $u_i(x)$ calculées s'écrivent sous la forme suivante :

$$u_i(x) = U_{ie} - K_i(x - x_{ie}) + \tilde{u}_i(x).$$

U_{ie} est la commande qui permet d'atteindre la position d'équilibre x_{ie} , K_i est le gain assurant l'existence d'une fonction de Lyapunov assignable et $\tilde{u}_i(x)$ est la commande calculée avec la formule de Sontag 5.25.

La commande ainsi séquencée répond à l'objectif que nous nous étions initialement fixé.

CHAPITRE 4

UTILISATION DE L'ESTIMATIONS DE DOMAINES D'ATTRACTION POUR LE SÉQUENCEMENT DE CONTRÔLEURS

La méthode présentée au cours de ce chapitre vise à construire des contrôleurs remplissant la même fonction que ceux construits lors du chapitre 3. Rappelons que l'objectif est de ramener le système à un point d'équilibre donné (qui sera par défaut l'origine) en partant de n'importe quel point d'un ensemble de points d'équilibre fourni par le cahier des charges.

Cette méthode vient comme une alternative de celle utilisant les fonctions de Lyapunov assignables. En effet, le but est de pouvoir s'abroger de la condition portant sur le nombre d'états linéaires et sur le nombre de commandes. Nous utiliserons à cette fin l'estimation des domaines d'attraction.

Rappelons qu'on appelle domaine d'attraction d'un point d'équilibre x_e , l'ensemble des points de l'espace d'état tels que toute trajectoire débutant dans cet ensemble converge vers x_e .

Dans un premier temps, nous allons exposer les différents types de méthode d'estimation de domaine d'attraction. Nous présenterons ensuite la méthode d'estimation de domaines d'attraction choisie. L'algorithme de séquençement de contrôleurs sera alors explicité avant de faire une comparaison entre la méthode du chapitre 3 et celle présentée dans ce chapitre.

4.1 Etat de l'art

Genesio, Tartaglia et Vicino distinguent trois grandes classes de méthodes d'estimation de domaines d'attraction dans (Genesio, Tartaglia, Vicino, 1985). Celles-ci sont :

- les méthodes basées sur le théorème de Zubov,
- les méthodes basées sur le théorème de Lasalle,
- les autres.

Parmi ces méthodes, les deux premières sont basées sur la stabilité au sens de Lyapunov.

Définition : Stabilité au sens de Lyapunov (Khalil, 2002)

Soit $x = 0$ un point d'équilibre du système non linéaire $\dot{x} = f(x)$. Soit D un voisinage de $x = 0$. Soit $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à dérivées partielles continues telle que :

- $V(0) = 0$,
- $V(x) > 0, \forall x \in \{D - 0\}$,
- $\dot{V}(x) \leq 0$.

Alors $x = 0$ est stable. Si la dérivée temporelle de V est strictement négative sur $\{D - 0\}$, alors $x = 0$ est asymptotiquement stable. Si de plus V tend vers l'infini quand $\|x\|$ tend vers l'infini, alors $x = 0$ est asymptotiquement stable au sens global.

Toutes les méthodes ne faisant pas appel explicitement à cette définition de la stabilité sont dites non Lyapunov.

4.1.1 Les méthodes non Lyapunov

Les méthodes non Lyapunov sont souvent numériques. Parmi ces méthodes, on peut prendre pour exemple la méthode d'inversion de trajectoire (que l'on trouve dans la littérature anglophone sous la dénomination "trajectory reversing method").

Nous supposons connaître une estimation conservative du domaine d'attraction, noté Γ_0 . L'objectif est d'étendre cette estimation.

On considère le système non linéaire dont le modèle d'état est donné par :

$$\dot{x} = f(x), \quad (4.1)$$

où x est le vecteur d'états et f est une fonction K-Lipschizienne.

Nous considérons alors le système :

$$\dot{x} = -f(x). \quad (4.2)$$

Ceci revient à effectuer la transformation $t \rightarrow -t$.

On considère un ensemble de points de Γ_0 . Ces points sont pris comme conditions initiales pour le système 4.2. En déterminant les trajectoires débutant en ces points, on obtient une estimation plus étendue du domaine d'attraction.

Une présentation plus complète de cette méthode est réalisée dans (Genesio, Taglia, Vicino, 1985).

Il est à noter que la frontière du domaine d'attraction est composé de l'union de

trajectoires du système. Ceci justifie l'idée de la méthode présentée.

Nous n'avons pas retenu cette méthode car nous désirons obtenir une expression analytique de l'estimation du domaine d'attraction.

4.1.2 Méthodes basées sur le théorème de Zubov

Ces méthodes présentent l'avantage d'obtenir une expression analytique du domaine d'attraction exact. Elles sont basées sur le théorème suivant :

Théorème de Zubov :(Genesio, Tartaglia, Vicino, 1985)

Considérons le système non linéaire $\dot{x} = f(x)$. Supposons qu'il existe une fonction $V : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfassent les propriétés suivantes :

- V est continuellement différentiable et définie positive dans G . De plus, les valeurs de V sont comprises entre 0 et 1 pour tout élément non nul de G .
- Lorsque x approche la frontière de G , ou lorsque que la norme de x tend vers l'infini dans le cas où G n'est pas borné, $V(x)$ tend vers 1.
- h est continue et définie positive sur \mathbb{R}^n .
- pour tout x élément de G , on a : $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = -h(x)[1 - V(x)]$.

Alors $x = 0$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable et G est son domaine d'attraction.

On peut trouver ce théorème sous différentes formes. Dans tous les cas, on fait les mêmes suppositions sur V et h . La différence vient de l'expression de l'égalité satisfaite par $\dot{V}(x)$.

La fonction h est choisie arbitrairement. La principale difficulté réside en l'obtention

de V . Les inconvénients de ce type de méthodes sont le choix arbitraire de h , la complexité calculatoire et la convergence non uniforme des solutions comme précisé dans (Genesio, Tartaglia, Vicino, 1985). C'est pour ces raisons que nous n'avons pas retenu une méthode de ce type.

Le principal avantage de ces méthodes est l'obtention d'un domaine d'attraction exact.

4.1.3 Méthodes basées sur le théorème de Lasalle

Les méthodes appartenant à cette classe s'appuient sur le théorème de Lasalle. Ce théorème est le suivant :

Théorème de Lasalle :(Khalil, 2002)

Soit Ω un compact invariant pour le système $\dot{x} = f(x)$ (c'est à dire que toute solution commençant dans Ω reste dans cet ensemble). Soit $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continuellement différentiable telle que $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout x de Ω . De plus, on suppose V bornée sur Ω . Soit E l'ensemble des points de Ω tels que $\dot{V}(x) = 0$. Soit M le plus grand ensemble invariant inclus dans E . Alors toute solution commençant dans Ω approche M quand t tend vers l'infini.

On obtient une estimation du domaine d'attraction lorsque le plus grand ensemble invariant inclu dans $\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$ se restreint au point d'équilibre considéré.

Dans la plupart des méthodes, nous sommes amenés à chercher des ensembles invariants de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c\}$. Nous désirons naturellement que cet ensemble soit le plus vaste possible. En effet, nous désirons que cette estimation soit la plus représentative possible du domaine d'attraction exact. Coraluppi (Coraluppi, 1992) met en avant deux points à optimiser afin d'obtenir un ensemble

invariant le plus proche possible du domaine d'attraction exact.

Le premier point concerne le choix de la fonction de Lyapunov. Nous n'avons pas cherché à optimiser ce choix. Dans la méthode que nous allons utiliser, nous prendrons des fonctions de Lyapunov quadratiques, c'est-à-dire de la forme :

$$V(x) = x^T P x.$$

Où P est une matrice définie positive.

Le deuxième point permettant d'optimiser l'estimation du domaine d'attraction est le choix de c tel que $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c\}$ soit un ensemble invariant inclus dans $\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$. Nous désirons obtenir une valeur de c la plus grande possible. Afin d'optimiser cette valeur, nous effectuerons une dichotomie. Nous présenterons plus en détail cette optimisation au cours de la présentation de la méthode employée.

Dans ce type de méthode, si $\{x \in \mathbb{R}^n - \{0\} : V(x) < c\}$ est inclus dans l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n - \{0\} : \dot{V}(x) < 0\}$, alors l'invariance de $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c\}$ est assurée comme nous allons le démontrer.

On suppose $\{x \in \mathbb{R}^n - \{0\} : V(x) < c\}$ inclus dans $\{x \in \mathbb{R}^n - \{0\} : \dot{V}(x) < 0\}$.

Soit x_0 un point de $\{x \in \mathbb{R}^n - \{0\} : V(x) < c\}$. Soit $x(t)$ un point de la trajectoire débutant en x_0 , alors :

$$\int_0^t \dot{V} dt = V(x(t)) - V(x_0).$$

Or \dot{V} est continue et strictement négative, donc :

$$V(x(t)) < V(x_0) < c.$$

Donc tout point de la trajectoire est élément de $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c\}$. Ce qui prouve l'invariance de cet ensemble.

4.2 Présentation de la méthode d'estimation d'un domaine d'attraction

Nous allons présenter une méthode d'estimation de domaine d'attraction utilisant le théorème de Lasalle. Comme pour le procédé utilisant les fonctions de Lyapunov assignables, nous allons considérer des systèmes affines en la commande, c'est-à-dire des systèmes ayant un modèle d'état pouvant se mettre sous la forme :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u. \quad (4.3)$$

Où u est le vecteur de commandes, x est le vecteur d'états, f et g sont des fonctions de classe C^∞ .

Comme au cours du chapitre 3, nous commençons par mettre le système sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_n \\ \dot{x}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n(x_n) \\ f_l(x_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_n(x_n) \\ A_l(x_n) \end{pmatrix} x_l + \begin{pmatrix} g_n(x_n) \\ g_l(x_n) \end{pmatrix} u, \quad (4.4)$$

où x_n est le vecteur regroupant les états non linéaires et x_l le vecteur regroupant les états linéaires. Comme il a été fait au cours du chapitre 3, nous avons classé les états intervenant dans g comme étant non linéaires.

Sans perte de généralité, nous considérons le point $x_e = 0$ comme point d'équilibre.

Après linéarisation autour de l'origine, nous effectuons un retour d'états afin de rendre ce point asymptotiquement stable. Nous nous assurons ainsi de l'existence d'un domaine d'attraction.

Ainsi, le système en boucle fermée a pour expression :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_n \\ \dot{x}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n(x_n) - g_n(x_n)K_n x_n \\ f_l(x_n) - g_l(x_n)K_n x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_n(x_n) - g_n(x_n)K_l \\ A_l(x_n) - g_l(x_n)K_l \end{pmatrix} x_l.$$

On renote cette expression sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_n \\ \dot{x}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_n(x_n) \\ \tilde{f}_l(x_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{A}_n(x_n) \\ \tilde{A}_l(x_n) \end{pmatrix} x_l. \quad (4.5)$$

On calcule une matrice définie positive P telle que $V(x) = x^T P x$ soit de Lyapunov en résolvant l'équation de Lyapunov.

En décomposant selon les dimensions de x_n et x_l , on obtient :

$$V(x_n, x_l) = x_n^T P_{nn} x_n + 2x_n^T P_{nl} x_l + x_l^T P_{ll} x_l, \quad (4.6)$$

et :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_n, x_l) &= x_n^T (P_{nn} \tilde{f}_n(x_n) + P_{nl} \tilde{f}_l(x_n)) \\
&+ (x_n^T (P_{nn} \tilde{A}_n(x_n) + P_{nl} \tilde{A}_l(x_n)) + \tilde{f}_l^T(x_n) P_{ll} + \tilde{f}_n^T(x_n) P_{nl}) x_l \\
&+ x_l^T (P_{ln} \tilde{A}_n(x_n) + P_{ll} \tilde{A}_l(x_n)) x_l
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Dans le cadre du théorème de Lasalle, l'ensemble $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq c\}$, avec c une constante positive, sera une estimation du domaine d'attraction si $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) < 0\}$.

On effectue alors un quadrillage des x_n possibles, c'est-à-dire l'ensemble des x_n tels que $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c\}$ est non vide. On peut alors tester pour chaque point si :

$$\forall x_l : V(x_n, x_l) \leq c, \dot{V}(x_n, x_l) < 0. \tag{4.8}$$

Si cette relation est vérifiée pour tous les x_n admissibles, alors l'ensemble :

$$\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c\}$$

est une estimation du domaine d'attraction.

Notons que les relations 4.6 et 4.7 sont quadratiques en x_l . Pour chaque x_n admissible, la relation 4.8 peut donc être vérifiée en utilisant la S-procedure.

Remarque :

Si le système ne possède que des états non linéaires, la procédure revient à faire un quadrillage de $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c\}$ et de tester la négativité de \dot{V} en chacun des points du quadrillage.

Afin d'obtenir une estimation la plus proche possible du domaine d'attraction exact, nous effectuons une dichotomie sur la valeur c . Ce procédé a déjà été expliqué lors du chapitre 3.

Nous allons illustrer dans ce qui suit la méthode d'estimation de domaine d'attraction à travers deux exemples académiques. Ces deux exemples seront traités en parallèle.

On appelle système 1 le système ayant le modèle d'état 4.9.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + (x_1^2 - 1)x_2 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Le système 2 a pour équations d'état 4.10.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_1^2x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Dans les deux cas, x_1 est un état non linéaire et x_2 est un état linéaire.

Ces systèmes sont asymptotiquement stables autour de la position d'équilibre $x_e = 0$.

La matrice jacobienne du système 1 en ce point est :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Celle du système 2 est :

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

En posant $Q = I_2$ pour les résolutions d'équations de Lyapunov $A^T P + PA = -Q$, on obtient pour le système 1 :

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

et pour le système 2 :

$$P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

En indiquant les fonctions de Lyapunov obtenues pour le système 1 et le système 2 respectivement par 1 et 2, on a donc :

$$V_1(x_1, x_2) = \frac{3}{2}x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 \quad (4.15)$$

$$\dot{V}_1(x_1, x_2) = x_1^2(2x_2 - 1) - x_2^2 - x_1^3x_2 \quad (4.16)$$

$$V_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \quad (4.17)$$

$$\dot{V}_2(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 2x_1^3x_2 \quad (4.18)$$

Pour le système 1, l'ensemble des x_1 tel que $\{x \in \mathbb{R}^2 : V_1(x) < c\}$ est non vide est le segment $S_1 =] -\sqrt{\frac{4c}{5}}, \sqrt{\frac{4c}{5}}[$.

Pour le système 2, l'ensemble des x_1 tel que $\{x \in \mathbb{R}^2 : V_2(x) < c\}$ est non vide est le segment $S_2 =] -\sqrt{2c}, \sqrt{2c}[$.

Nous effectuons alors un découpage de S_1 et S_2 . Ainsi, vérifier la négativité de \dot{V} sur les ensembles $\{x \in \mathbb{R}^2 : V_i(x) < c\}$ revient à effectuer une S-procedure pour chacun des points de S_1 pour le système 1 et S_2 pour le système 2.

Pour le système 1, nous sommes donc amenés à vérifier pour chaque $x_1 \in S_1$ l'existence d'un réel $\tau > 0$ tel que :

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}x_1^2 - c + \tau x_1^2 & -\frac{x_1}{2} + \tau \frac{x_1^3}{2} & 0 \\ -\frac{x_1}{2} + \tau \frac{x_1^3}{2} & 1 - \tau(2x_1^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & -\tau \end{pmatrix} \leq 0$$

Pour le système 2, nous sommes amenés à vérifier pour chaque $x_1 \in S_2$ l'existence d'un réel $\tau > 0$ tel que :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1^2 - c + \tau x_1^2 & -\tau x_1^3 & 0 \\ -\tau x_1^3 & \frac{1}{2} + \tau & 0 \\ 0 & 0 & -\tau \end{pmatrix} \leq 0$$

Si l'existence de $\tau > 0$ est vérifiée pour chacun des points des segments, alors l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) < c\}$ est une estimation du domaine d'attraction.

Afin de choisir c , nous effectuons une dichotomie. Pour amorcer cette procédure, nous avons besoin d'une valeur supérieure, notée c_{sup} , telle que :

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : V_i(x) < c_{sup}\}$$

n'est pas inclus dans $E_i = \{x \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}_i(x) < 0\}$. Nous avons également besoin d'une valeur inférieure, notée c_{inf} , telle que $\{x \in \mathbb{R}^2 : V_i(x) < c_{inf}\}$ est inclus dans E_i .

On obtient pour le système 1 :

$$c_{sup} = 6.9098, \tag{4.19}$$

$$c_{inf} = 0.6910, \tag{4.20}$$

et pour le système 2 :

$$c_{sup} = 5, \tag{4.21}$$

$$c_{inf} = 0.5. \tag{4.22}$$

Pour les deux systèmes, nous avons posés pour test d'arrêt $c_{sup} - c_{inf} < 10^{-3}$. Ainsi, après 13 itérations pour chaque système, on obtient pour estimation des domaines d'attraction les ensembles suivant :

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : V_1(x) < 2.3049\}, \quad (4.23)$$

et :

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : V_2(x) < 0.07697\}. \quad (4.24)$$

Graphiquement, ces résultats sont illustrés par les figures 4.1 et 4.2.

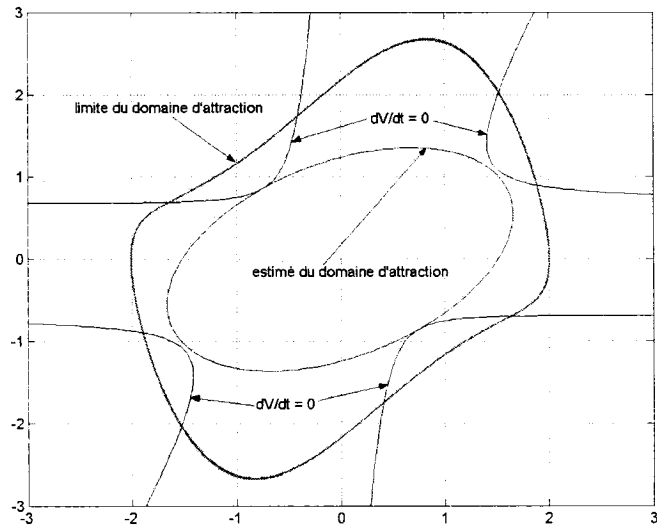


FIG. 4.1 *Résultat de l'estimation pour le système 1*

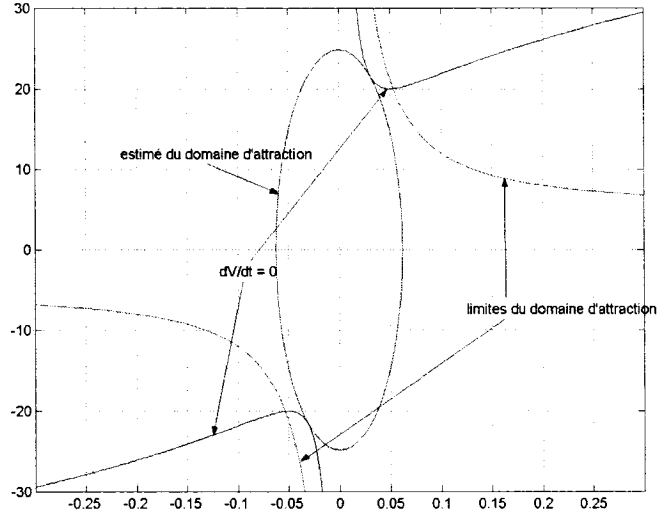


FIG. 4.2 *Résultat de l'estimation pour le système 2*

4.3 Algorithme de séquençement de contrôleurs

En utilisant la méthode précédemment expliquée, nous sommes en mesure d'estimer des domaines d'attraction.

On suppose que l'ensemble des points d'équilibre est non trivial et connexe. Ainsi, si nous avons estimé un domaine d'attraction pour un point d'équilibre x_e , l'intersection de l'ensemble des points d'équilibre et de cet estimé est non trivial (i.e. non vide et non limité à un point).

Rappelons que nous désirons construire un contrôleur répondant à la problématique suivante :

Soient x_0 un point d'équilibre. Soit E un ensemble de points d'équilibre tel que

$x_0 \in E$. On désire concevoir un contrôleur tel que toute trajectoire débutant dans E converge vers x_0 .

Tous les points d'équilibre utilisés ultérieurement sont rendus asymptotiquement stables via un retour d'états. Ainsi, il existe un domaine d'attraction pour chacun des points d'équilibre. Ceci suppose que le système est stabilisable en chacun de ces points.

Afin d'amorcer l'algorithme, nous considérons le point d'équilibre x_0 . Nous estimons un domaine d'attraction pour ce point, noté Ω_0 .

Si E est inclus dans Ω_0 , on arrête l'algorithme. Si ce n'est pas le cas, nous poursuivons la procédure.

Grâce à l'hypothèse de non trivialité et de connexité de l'ensemble des points d'équilibre, il existe un point, noté x_1 , tel que $x_1 \in \Omega_0 \cap E$ et tel que $x_1 \neq x_0$.

On estime alors un domaine d'attraction pour x_1 , noté Ω_1 .

Si $E \subset \Omega_0 \cup \Omega_1$, on arrête l'algorithme, sinon on continue la procédure jusqu'à ce que $E \subset \bigcup_i \Omega_i$.

On note u_i la commande stabilisant asymptotiquement le point d'équilibre x_i . u_i a la forme suivante :

$$u_i = U_{i0} - K_i(x - x_i).$$

U_{i0} est la commande qui permet d'atteindre x_i et K_i est le gain stabilisant asymptotiquement la position d'équilibre x_i .

A chaque instant, on mesure l'état dans lequel se trouve le système. Notons x cet

état. On applique alors la commande u_i , où $i = \min\{j : x \in \Omega_j\}$.

Ainsi, pour tout élément de E , on commence par appliquer la commande u_i . Cette commande fait converger la trajectoire vers x_i . Par construction, la trajectoire entrera dans le domaine d'attraction Ω_{i-1} avant d'atteindre x_i . à la frontière de Ω_{i-1} , on applique la commande u_{i-1} . Ainsi, la trajectoire converge vers x_{i-1} . De commutation en commutation, le système se ramène à la position x_0 . Le contrôleur ainsi séquencé remplit donc sa fonction qui est de faire converger toute trajectoire débutant dans E vers x_0 .

Ce procédé est illustré par la figure 4.3.

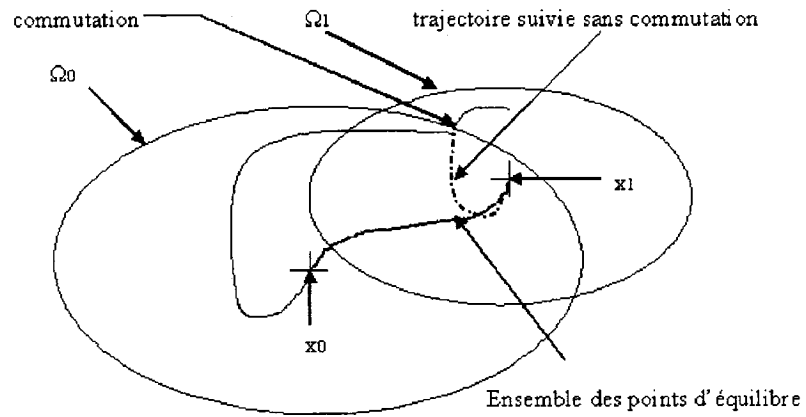


FIG. 4.3 *Illustration graphique de la méthode*

4.4 Discussion et comparaison avec la méthode utilisant les fonctions de Lyapunov assignables

Nous avons vu au cours de ce chapitre une méthode permettant de construire un contrôleur qui fait converger toute trajectoire débutant dans un ensemble de points d'équilibre vers un point d'équilibre préalablement défini.

Afin de pouvoir appliquer la méthode, nous avons effectué les mêmes restrictions quant à la classe de systèmes non linéaires que pour la méthode utilisant les fonctions de Lyapunov assignables. Nous avons cependant levé la contrainte concernant le nombre d'états linéaires et le nombre de commandes. En effet, dans le cas des fonctions de Lyapunov assignables, nous considérons des systèmes ayant plus d'états linéaires que de commandes pour pouvoir paramétrer le noyau de commandabilité.

Cette méthode s'applique donc à un ensemble plus vaste de systèmes non linéaires.

Pour estimer des domaines d'attraction, nous avons vérifié la négativité de \dot{V} sur un ensemble de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c\}$. La méthode utilisant les fonctions de Lyapunov assignables revenait à vérifier la négativité de \dot{V} sur des ensembles de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : L_g V(x) = 0\}$. Dans le cas où la méthode utilisant les fonctions de Lyapunov assignables est applicable, nous nous attendons donc à devoir faire moins de commutations qu'en utilisant l'estimation de domaine d'attraction pour atteindre le même objectif. En effet, la contrainte de négativité de \dot{V} est moins restrictive lors de l'utilisation des fonctions de Lyapunov assignables que pour l'estimation de domaines d'attraction. Ainsi, supposons qu'on arrive à déterminer V assignable sur $E_{CLF} = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c_{CLF}\}$. Supposons que pour le même système et en utilisant la même fonction V , on arrive à déterminer un ensemble $E_{estimation} = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c_{estimation}\}$ qui soit un domaine

d'attraction. Alors, $E_{estimation} \subset E_{CLF}$. Nous allons illustrer ce constat lors d'études de cas présentées lors du chapitre 5.

Ainsi, lorsque la méthode utilisant les fonctions de Lyapunov assignables est applicable, nous la préférons à celle utilisant l'estimation de domaines d'attraction.

Nous réservons la méthode utilisant l'estimation de domaines d'attraction aux systèmes ayant moins d'états linéaires que de commandes.

CHAPITRE 5

ETUDES DE CAS

Dans ce chapitre, nous allons étudier trois systèmes : un pendule inversé sur chariot avec lien élastique, un modèle de la dynamique longitudinale d'un missile et un système de lévitation magnétique.

Dans chacun des cas, lorsque cela sera possible, nous appliquerons les deux méthodes afin de pouvoir les comparer. Rappelons que nous nous attendons à devoir effectuer moins de commutations dans le cas des fonctions de Lyapunov assignables que dans le cas de l'utilisation de l'estimation de domaines d'attraction.

Les simulations ont été faites à l'aide de Matlab[®], avec un processeur AMD Athlon 64 3000+ et 1Go de RAM DDR 400.

5.1 Cas du pendule inversé sur chariot avec lien élastique

5.1.1 Présentation du système et objectif de la commande

Définition du système :

Ce système est composé d'un chariot sur rails monté d'un pendule inversé. Le pendule est attaché à un point fixe par un lien élastique (c.f. figure 5.1).

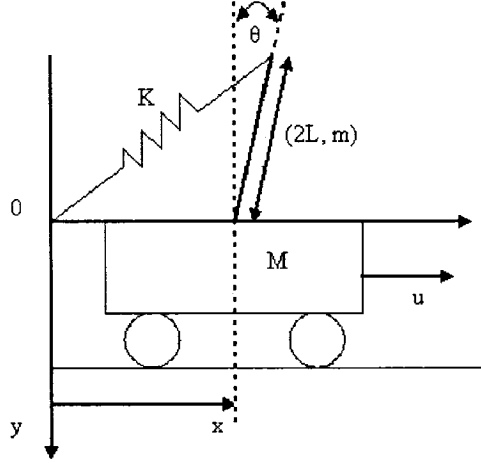


FIG. 5.1 *Pendule inversé sur chariot avec lien élastique*

La dynamique de ce système est régie par les équations suivantes (McConley, Appelby, Dahleh, Feron, 2000) :

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \frac{mL \sin(\theta)([M + m]g + 2KL \cos(\theta)) - KL \cos(\theta)(2M + m)x - mL \cos(\theta)u}{a(\theta)} \\ \ddot{x} &= \frac{-L \sin(\theta)(m^2gL \cos(\theta) + 2KI_z) + K(2mL^2 \cos^2(\theta) - I_z)x + I_z u}{a(\theta)}\end{aligned}\quad (5.1)$$

où M est la masse du chariot, m celle du pendule, g la constante de gravité, K la constante d'élasticité et L la demi longueur du pendule. De plus, θ est l'angle entre la verticale ascendante et le pendule, x l'éloignement entre le point d'attache de l'élastique et le centre de gravité du chariot, et u la commande : une force latérale appliquée sur le chariot.

Dans ces équations, nous avons posé :

$$I_z = \frac{4}{3}mL^2 \quad (5.2)$$

$$a(\theta) = I_z(M + m) - m^2L^2 \cos^2(\theta) \quad (5.3)$$

Les valeurs numériques utilisées sont données dans le tableau 5.1.

Paramètres	Valeurs numériques
M	1
m	1
L	1
K	1
g	9.81

TAB. 5.1 Valeurs numériques des paramètres du pendule inversé sur chariot avec lien élastique

En utilisant ces valeurs, on obtient le modèle d'état :

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} &= \frac{\sin(\theta)(19.62 + 2\cos(\theta)) - 3\cos(\theta)x - \cos(\theta)u}{8/3 - \cos^2(\theta)} \\ \dot{x} &= \dot{x} \\ \ddot{x} &= \frac{-\sin(\theta)(9.81\cos(\theta) + 8/3) + (2\cos^2(\theta) - 4/3)x + (4/3)u}{8/3 - \cos^2(\theta)} \end{aligned}$$

Objectifs de la commande :

On désire concevoir une commande telle que le système se ramène à l'origine pour toute trajectoire commençant en un point d'équilibre $\theta_e \in [0^\circ, 60^\circ]$.

Paramétrabilité du noyau de commandabilité :

La variable d'état qui induit la non linéarité du système est θ . Ainsi, on posera :

$$x_n = \theta \quad (5.4)$$

$$x_l = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

On constate que le système possède une seule commande et trois états linéaires. Ainsi, la méthode utilisant les fonctions de Lyapunov assignables est applicable.

Connexité de l'ensemble des points d'équilibre :

L'ensemble des points d'équilibre est défini par les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} x_e &= \frac{\tan(\theta_e)(19.62 + 2 \cos(\theta_e)) - (3/4) \sin(\theta_e)(9.81 \cos(\theta_e) + 8/3)}{3 - (3/4)(2 \cos^2(\theta_e) - 4/3)} \\ u_e &= \tan(\theta_e)(19.62 + 2 \cos(\theta_e)) - 3x_e \end{aligned}$$

Ces relations sont issues du modèle d'état.

Ces deux fonctions de θ_e sont continues sur l'intervalle $]-\pi/2; \pi/2[$. Ceci prouve la connexité de l'ensemble des points d'équilibre. De plus, la valeur de θ_e considérée définit entièrement la position d'équilibre correspondante. Dans la suite, par abus de langage, on parlera de la position d'équilibre θ_e .

Commandabilité du système :

La linéarisation du système autour d'un point d'équilibre θ_e est donnée par les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & -\frac{3 \cos(\theta_e)}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{41} & 0 & \frac{2 \cos^2(\theta_e) - 4/3}{a} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\cos(\theta)}{a} \\ 0 \\ \frac{4}{3a} \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

où :

$$A_{21} = \frac{1}{a^2}([19.62 \cos(\theta_e) + (\cos^2(\theta_e) - \sin^2(\theta_e))]a - \sin(\theta_e)(19.62 + 2 \cos(\theta_e))da + 3[\sin(\theta_e)a + \cos(\theta_e)da]x_e + [\sin(\theta_e)a + \cos(\theta_e)da]u_e)$$

$$A_{41} = \frac{1}{a^2}([-(8/3) \cos(\theta_e) + 9.81(\sin^2(\theta_e) - \cos^2(\theta_e))]a + \sin(\theta_e)(9.81 \cos(\theta_e) + 8/3)da - [4 \sin(\theta_e) \cos(\theta_e)a + (2 \cos^2(\theta_e) - 4/3)da]x_e - (4/3)da u_e)$$

Dans ces relations $da = \frac{\partial a}{\partial \theta}|_{\theta_e}$ et $a = a(\theta_e)$.

On vérifiera à chaque linéarisation que la paire de matrices (A, B) ainsi définie est commandable.

5.1.2 Construction des contrôleurs séquencés

5.1.2.1 Méthode utilisant les fonctions de Lyapunov assignables

Nous commençons par considérer le point d'équilibre $\theta_e = 0^\circ$.

Existence et définition d'une fonction V assignable dans un voisinage de θ_e :

Nous effectuons un retour d'états $u = -Kx$ afin de stabiliser asymptotiquement le système autour de cette position. Le gain K est calculé en résolvant l'équation de Riccati :

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P = -Q$$

où P , R et Q sont des matrices symétriques définies positives, A et B sont issues de la linéarisation du système. P est l'inconnue, R et Q sont à choisir. Nous avons pris l'identité pour Q et $R = \frac{1}{1000}$. Une fois P calculée, on calcule le gain en appliquant la formule suivante :

$$K = R^{-1}B^T P.$$

Ce choix de retour d'états est celui qui a été fait dans (McConley, Appelby, Dahleh, Feron, 2000).

On obtient $K = [-294.4209 \quad -109.0727 \quad 26.3129 \quad -35.1106]$.

Ce retour d'états assure l'assignabilité de $V : x \rightarrow x^T P x$ sur un voisinage de l'origine. Nous allons alors chercher une constante $c > 0$ telle que $V : x \rightarrow x^T P x$

soit assignable sur l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^4 : x^T P x < c\}$ avec P donnée par l'équation de Ricatti :

$$P = \begin{pmatrix} 16.5966 & 5.4484 & 0.1399 & 3.7183 \\ 5.4484 & 1.9702 & 0.1113 & 1.3413 \\ 0.1399 & 0.1113 & 1.1057 & 0.1164 \\ 3.7183 & 1.3413 & 0.1164 & 0.9621 \end{pmatrix}.$$

Choix de c :

Nous allons effectuer une dichotomie sur c , afin d'obtenir le plus grand ensemble $\{x \in \mathbb{R}^4 : x^T P x < c\}$ tel que V soit assignable dessus. Cette procédure a été exposée au cours du chapitre 3. Afin d'amorcer la dichotomie, on trouve que V est assignable sur $\{x \in \mathbb{R}^4 : x^T P x < 0.3119\}$, et que V n'est pas assignable sur $\{x \in \mathbb{R}^4 : x^T P x < 3.1193\}$. Nous choisissons comme test d'arrêt la condition $c_{sup} - c_{inf} < 0.01$. Ce choix n'est pas forcément optimal. Cependant, il donne des résultats satisfaisant dans le sens où ce test permet d'affiner la valeur de c retenue. Nous obtenons alors que V est assignable sur $\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x^T P x < 0.4764\}$.

Assignabilité de V sur $\{x \in \mathbb{R}^4 : x^T P x < c\}$:

Posons $\Omega(c) = \{x \in \mathbb{R}^4 : x^T P x < c\}$. La vérification de l'assignabilité de V sur $\Omega(c)$, avec $c > 0$, est effectuée en utilisant la procédure exposée au chapitre 3. Comme nous l'avons précédemment vérifié le nombre d'états linéaires et le nombre de commandes de ce système permet la paramétrisation du noyau de commandabilité en utilisant le théorème de McConley, Appelby, Dahleh et Feron (McConley, Appelby, Dahleh, Feron, 2000).

Afin de réaliser cette paramétrisation, nous avons mis le système bouclé par le retour d'états $u = -Kx$ sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_n \\ \dot{x}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n(x_n) \\ f_l(x_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_n(x_n) \\ A_l(x_n) \end{pmatrix} x_l + \begin{pmatrix} g_n(x_n) \\ g_l(x_n) \end{pmatrix} u,$$

avec $x_n = \theta$ et $x_l = [\dot{\theta} \ x \ \dot{x}]^T$. Ainsi :

$$f_n(\theta) = 0,$$

$$f_l(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\theta)(19.62+2\cos(\theta))-294.4209\cos(\theta)\theta}{8/3-\cos^2(\theta)} \\ 0 \\ \frac{-\sin(\theta)(9.81\cos(\theta)+8/3+294.4209(4/3)\theta)}{8/3-\cos^2(\theta)} \end{pmatrix},$$

$$A_n(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_l(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{109.0727\cos(\theta)}{8/3-\cos^2(\theta)} & \frac{23.3129\cos(\theta)}{8/3-\cos^2(\theta)} & -\frac{35.1106\cos(\theta)}{8/3-\cos^2(\theta)} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{109.0727(4/3)\cos(\theta)}{8/3-\cos^2(\theta)} & \frac{2\cos^2(\theta)-4/3-26.3129(4/3)\cos(\theta)}{8/3-\cos^2(\theta)} & \frac{35.1106(4/3)\cos(\theta)}{8/3-\cos^2(\theta)} \end{pmatrix},$$

$$g_n(\theta) = 0,$$

$$\text{et } g_l(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{\cos(\theta)}{8/3-\cos^2(\theta)} \\ 0 \\ \frac{4}{3(8/3-\cos^2(\theta))} \end{pmatrix}.$$

En utilisant ces notations et en découpant P selon les dimensions de x_n et x_l , pour chaque valeur de θ tel que $\Omega(c)$ est non vide, nous sommes en mesure de paramétrer le noyau de commandabilité.

Le problème d'assignabilité de V revient alors pour chaque valeur de θ à un problème d'inclusion de deux ensembles de la forme :

$$\{\lambda \in \mathbb{R}^2 : \lambda^T \alpha(\theta) \lambda + 2\beta(\theta)^T \lambda + \gamma(\theta) < 0\}$$

Ainsi, nous effectuons une S-procedure pour chaque valeur.

En utilisant cette méthode, nous avons montré que V est assignable sur $\Omega_0 = \Omega(0.4764)$.

Calcul de la commande qui assigne V à être de Lyapunov sur Ω_0 :

Nous pouvons calculer une commande qui assigne V à être de Lyapunov sur Ω_0 en utilisant la formule de Sontag (Sontag, 1990) :

$$u = \begin{cases} -\frac{a+\sqrt{a^2+b^4}}{b}, & \text{si } b \neq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.8)$$

avec $a = L_{\tilde{f}}V$ (où $\tilde{f}(x_n, x_l) = f(x_n) + A(x_n)x_l$) et $b = L_gV$.

Choix du point suivant et arrêt de la procédure :

L'ensemble des points d'équilibre $\theta_e \in [0^\circ, 60^\circ]$ n'est pas inclus dans Ω_0 . Nous cherchons alors un point d'équilibre élément de Ω_0 . Nous choisissons le point $\theta_e = 5.7754^\circ$.

Nous recommençons alors la procédure jusqu'à ce les points d'équilibre désirés soient inclus dans l'union des ensembles $\Omega_i = \{x \in \mathbb{R}^4 : (x - x_{ie})^T P_i (x - x_{ie}) < c_i\}$.

Résultat final :

52 linéarisations sont nécessaires. La simulation dure 452 secondes. Les résultats relatifs aux 6 premières itérations sont représentés par la figure 5.2.

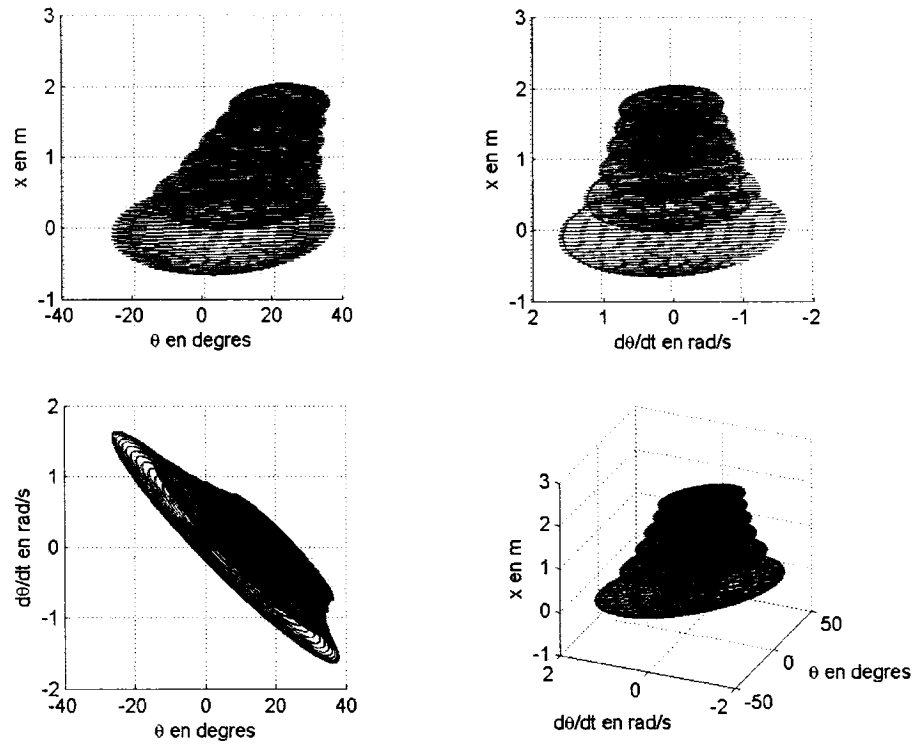


FIG. 5.2 *domaine d'assignabilité de V pour le pendule inversé*

5.1.2.2 Méthode utilisant l'estimation de domaines d'attraction

Existence d'un domaine d'attraction :

Pour tous les points d'équilibre autour desquels nous effectuerons une linéarisation, nous réaliserons un retour d'états $u = -Kx$ dont nous calculerons le gain en résolvant l'équation de Riccati :

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P = -Q$$

où P , Q et R sont des matrices symétriques définies positive, A et B sont issues de la linéarisation du système. P est l'inconnue de cette équation. Nous avons choisi l'identité pour Q et $R = \frac{1}{1000}$. Le gain est alors donné par la formule :

$$K = R^{-1}B^T P.$$

Ainsi le système sera rendu asymptotiquement stable autour de chaque position d'équilibre considérée. Nous sommes ainsi assurés de l'existence d'un domaine d'attraction. Pour chaque point de linéarisation, noté x_e , la fonction :

$$V : x \rightarrow (x - x_e)^T P (x - x_e),$$

est une fonction de Lyapunov.

Notons $\Omega(c) = \{x \in \mathbb{R}^4 : V(x) < c\}$, avec $c > 0$.

Dans le cadre du théorème de Lasalle, $\Omega(c)$ estime le domaine d'attraction si $\dot{V}(x) < 0$ en tout point de $\Omega(c)$.

Nous allons détailler la procédure pour la première itération.

Retour d'état et choix de V

Nous prenons l'origine pour premier point de linéarisation. Les matrices jacobienues du système en boucle ouverte sont :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12.972 & 0 & -1.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -7.486 & 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.6 \\ 0 \\ 0.8 \end{pmatrix}.$$

La résolution de l'équation de Riccati donne la fonction de Lyapunov $V : x \rightarrow x^T P x$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} 16.5966 & 5.4484 & 0.1399 & 3.7183 \\ 5.4484 & 1.9702 & 0.1113 & 1.3413 \\ 0.1399 & 0.1113 & 1.1057 & 0.1164 \\ 3.7183 & 1.3413 & 0.1164 & 0.9621 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour stabiliser asymptotiquement le système autour de l'origine, nous appliquons le retour d'état $u = -Kx$, avec :

$$K = [-294.4209 \quad -109.0727 \quad 26.3129 \quad -35.1106].$$

Posons $\Omega(c) = \{x \in \mathbb{R}^4 : V(x) < c\}$.

Vérification si $\Omega(c)$ est un estimé du domaine d'attraction pour $c > 0$ fixé :

Rappelons que si $\Omega(c)$ est inclus dans l'ensemble des points tels que $\dot{V}(x) < 0$, alors $\Omega(c)$ estime le domaine d'attraction. Nous allons voir ici comment nous vérifions cette inclusion.

Nous mettons le système en boucle fermée sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_n \\ \dot{x}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n(x_n) \\ f_l(x_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_n(x_n) \\ A_l(x_n) \end{pmatrix} x_l \quad (5.9)$$

où $x_n = \theta$ et $x_l = [\dot{\theta} \quad x \quad \dot{x}]^T$. Ainsi :

$$f_n(\theta) = 0,$$

$$f_l(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\theta)(19.62+2\cos(\theta))-294.4209\cos(\theta)\theta}{8/3-\cos^2(\theta)} \\ 0 \\ \frac{-\sin(\theta)(9.81\cos(\theta)+8/3+294.4209(4/3)\theta)}{8/3-\cos^2(\theta)} \end{pmatrix},$$

$$A_n(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$A_l(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{109.0727\cos(\theta)}{8/3-\cos^2(\theta)} & \frac{23.3129\cos(\theta)}{8/3-\cos^2(\theta)} & -\frac{35.1106\cos(\theta)}{8/3-\cos^2(\theta)} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{109.0727(4/3)\cos(\theta)}{8/3-\cos^2(\theta)} & \frac{2\cos^2(\theta)-4/3-26.3129(4/3)\cos(\theta)}{8/3-\cos^2(\theta)} & \frac{35.1106(4/3)\cos(\theta)}{8/3-\cos^2(\theta)} \end{pmatrix}.$$

En découpant P selon les dimensions de x_n et de x_l , nous obtenons les expressions de $V(x_n, x_l)$ et de $\dot{V}(x_n, x_l)$ en appliquant les relations :

$$V(x_n, x_l) = x_n^T P_{nn} x_n + 2x_n^T P_{nl} x_l + x_l^T P_{ll} x_l \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_n, x_l) = & x_n^T (P_{nn} f_n + P_{nl} f_l) + \\ & (x_n^T (P_{nn} A_n + P_{nl} A_l) + f_l^T P_{ll} + f_n^T P_{nl}) x_l + \\ & x_l^T (P_{ln} A_n + P_{ll} A_l) x_l \end{aligned} \quad (5.11)$$

Considérons alors une constante $c > 0$. Vérifier si \dot{V} est strictement négative sur $\Omega(c)$ revient à tester l'inclusion de deux ensembles de la forme :

$\{x_l \in \mathbb{R}^3 : x_l^T \alpha(x_n) x_l + 2\beta^T(x_n) x_l + \gamma(x_n) < 0\}$, pour tout x_n tel que $\Omega(c)$ est non vide.

Ainsi, nous effectuons un quadrillage de l'ensemble des x_n admissibles comportant 200 points. Le choix de ce nombre de points a été fait pour rendre le découpage

raisonnablement représentatif de l'ensemble des valeurs admissibles. Pour chaque points de cet ensemble, effectuons une S-procedure pour vérifier l'inclusion de $\Omega(c)$ dans $\{x \in \mathbb{R}^4 : \dot{V}(x) < 0\}$.

Choix de $c > 0$:

Une dichotomie est réalisée pour obtenir la valeur de c la plus grande possible. Afin d'amorcer la procédure, nous remarquons que $\Omega(0.3119)$ est une estimation du domaine d'attraction, alors que $\Omega(3.1193)$ n'en est pas une.

Le test d'arrêt choisit est $c_{sup} - c_{inf} < 0.01$. Nous obtenons alors pour estimation du domaine d'attraction $\Omega_0 = \Omega(0.4545)$.

Choix du point suivant et arrêt de la procédure :

L'ensemble des points d'équilibre $\theta_e \in [0^\circ, 60^\circ]$, noté E , n'est pas inclus dans l'estimation du domaine d'attraction effectuée. Nous allons donc trouver un autre point d'équilibre inclus dans Ω_0 et reprendre la procédure d'estimation en ce point. Nous prenons pour point suivant $\theta_e = 5.6583^\circ$. Nous arrêtons la procédure lorsque E est inclus dans l'union des estimés calculés.

Résultat final :

52 estimations sont nécessaires pour concevoir le contrôleur désiré. La simulation prend 463 secondes. Les résultats relatifs aux 6 premières itérations sont représentés par la figure 5.3.

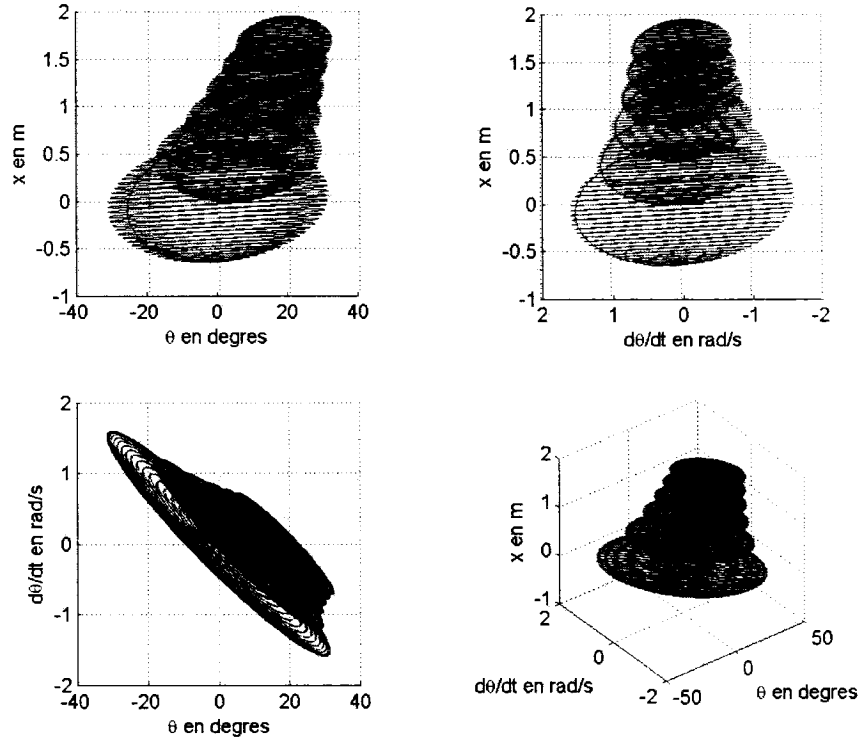


FIG. 5.3 Ensemble des estimés de domaines d'attraction pour le pendule inversé

5.1.2.3 Comparaison des deux méthodes

Nous pouvons constater que le nombre de linéarisations nécessaires est le même dans les deux cas (52 points). Néanmoins les domaines d'attraction calculés sont plus petits que les ensembles sur lesquels V est assignable. En effet, pour la première itération, nous avons trouvé avec la méthode utilisant les fonctions de Lyapunov assignables $\Omega_{0_{CLF}} = \{x \in \mathbb{R}^4 : V(x) < 0.4764\}$, alors que nous avons déterminé comme domaine d'attraction $\Omega_{0_{estimation}} = \{x \in \mathbb{R}^4 : V(x) < 0.4545\}$. Ainsi, les points de linéarisation sont plus rapprochés dans le cas de l'estimation de domaines

d'attraction que dans le cas des fonctions de Lyapunov assignables. Si dans cet exemple ceci ne change pas le nombre de linéarisations nécessaires, nous verrons que c'est le cas dans l'exemple du missile détaillé dans ce qui suit.

Nous constatons que les simulations sont plus rapides dans le cas des CLF que dans le cas de l'estimation de domaines d'attraction. Le nombre de points de linéarisation étant identique, la différence entre les deux méthodes vient alors de la taille des matrices intervenant dans la S-procedure et de l'étendue des ellipsoïdes obtenus. En effet, dans le cas des fonctions de Lyapunov assignables, la paramétrisation du noyau de commandabilité réduit la taille de l'espace sur lequel la négativité est testée par S-procedure ($\lambda \in \mathbb{R}^2$, alors que $x_l \in \mathbb{R}^3$). La différence d'étendue des ellipsoïdes peut influencer le temps de simulation dans le sens que la dichotomie risque d'être plus longue pour l'estimation de domaines d'attraction que pour le cas des fonctions de Lyapunov assignables.

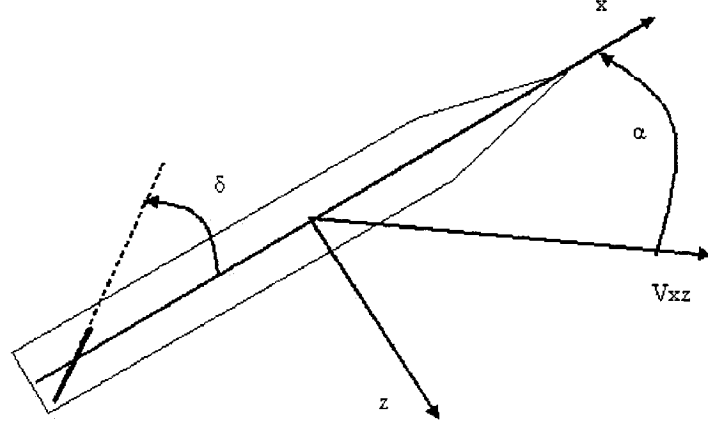
5.2 Cas d'un modèle de dynamique longitudinale d'un missile

Nous allons étudier ici le cas d'un modèle de dynamique longitudinale d'un missile. Nous verrons que le nombre de points de linéarisation nécessaire est moins grand en utilisant les fonctions de Lyapunov assignables qu'en utilisant la méthode basée sur l'estimation de domaines d'attraction.

5.2.1 Présentation du système et objectif de la commande

Définition du système :

La figure 5.4 représente le missile considéré.

FIG. 5.4 *Missile vu dans le plan vertical*

Le modèle d'état non linéaire de ce système est donné par le système d'équations 5.12 (Scorletti, 2003) :

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)K_{\alpha}MC_n(\alpha, \delta, M) + q \\ K_qM^2C_m(\alpha, \delta, M) \\ \dot{\delta} \\ -w_a^2\delta - 2\xi_a\dot{\delta} + w_a^2\delta_c \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

où α est l'angle d'incidence (c'est-à-dire l'angle entre l'axe x et la projection de la vitesse air du missile dans le plan xz), q est la vitesse de rotation du missile autour de l'axe orthogonal au plan xz , δ est l'angle que fait la gouverne par rapport à l'axe longitudinal du missile. Dans ce modèle, nous avons pris en compte de la dynamique de la gouverne. Ainsi, on note δ_c la commande appliquée. $C_n(\alpha, \delta, M)$

et $C_m(\alpha, \delta, M)$ sont définis par les équations suivantes :

$$C_n(\alpha, \delta, M) = a_n \alpha^3 + b_n \alpha |\alpha| + c_n (2 - M/3) \alpha + d_n \delta \quad (5.13)$$

$$C_m(\alpha, \delta, M) = a_m \alpha^3 + b_m \alpha |\alpha| + c_m (-7 + 8M/3) \alpha + d_m \delta \quad (5.14)$$

Nous utiliserons les valeurs numériques données dans le tableau 5.2.

Paramètres	Valeurs numériques
a_n	$1.0286.10^{-4}$
b_n	$-0.94457.10^{-2}$
c_n	-0.1696
d_n	-0.034
a_m	$2.1524.10^{-4}$
b_m	$-1.9546.10^{-2}$
c_m	0.051
d_m	-0.206
w_a	150
ξ_a	0.7
P	973.3
S	0.44
m	13.98
V	1036.4
d	0.75
I_y	182.5
K_α	$0.7PSd/(mV)$
K_q	$0.7PSd/I_y$
M	1

TAB. 5.2 Valeurs numériques des paramètres du missile

Objectif de la commande :

Nous désirons concevoir une commande telle que le système se ramène à l'origine pour toute trajectoire commençant en un point d'équilibre $\alpha_e \in [0^\circ, 90^\circ]$. Dans ce qui suit, nous noterons E l'ensemble des points d'équilibre ainsi défini.

Paramétrabilité du noyau de commandabilité :

Nous constatons que α est la variable d'état qui induit les non linéarités du système.

Nous définissons alors x_n et x_l comme suit :

$$x_n = \alpha \quad (5.15)$$

$$x_l = \begin{pmatrix} q \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

Ainsi, le système possède trois états linéaires et une seule commande. Le noyau de commandabilité est donc paramétrable en utilisant le théorème de McConley, Appelby, Dahleh et Feron (McConley, Appelby, Dahleh, Feron, 2000).

Connexité de l'ensemble des points d'équilibre :

Les points d'équilibre correspondant à $\alpha = \alpha_e$ sont donnés par les relations suivantes :

$$\delta_e = \left(\frac{-1}{d_m}\right)(a_m\alpha_e^3 + b_m|\alpha_e|\alpha_e + c_m(-7 + 8M/3)\alpha_e) \quad (5.17)$$

$$q_e = -\cos(\alpha_e)K_\alpha M(a_n\alpha_e^3 + b_n|\alpha_e|\alpha_e + c_n(2 - M/3)\alpha_e + d_n\delta_e) \quad (5.18)$$

$$\delta_{ce} = \delta_e \quad (5.19)$$

Ces relations sont obtenues à partir du modèle d'état.

En utilisant les valeurs numériques du tableau 5.2, nous obtenons :

$$\delta_e = 4.8544(2.1524 \cdot 10^{-4} \alpha_e^3 - 1.9546 \cdot 10^{-2} |\alpha_e| \alpha_e - (13/3) 0.051 \alpha_e) \quad (5.20)$$

$$q_e = -0.0155 \cos(\alpha_e) Cn \quad (5.21)$$

$$\delta_{ce} = \delta_e \quad (5.22)$$

où :

$$Cn = (1.0286 \cdot 10^{-4} \alpha_e^3 - 0.94457 \cdot 10^{-2} |\alpha_e| \alpha_e - 0.1696(5/3) \alpha_e - 0.034 \delta_e).$$

δ_e , q_e et δ_{ce} sont des fonctions continues de α_e . L'ensemble des points d'équilibre est donc connexe. De plus, le choix de α_e définit entièrement la position d'équilibre. Dans ce qui suit, par abus de langage, on parlera de la position d'équilibre α_e .

Commandabilité du système :

La linéarisation de ce système autour d'un point d'équilibre α_e est donnée par les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -0.0155 \sin(\alpha_e) C_n + 0.0155 \cos(\alpha_e) \frac{\partial C_n}{\partial \alpha} & 1 & -2.27 \cdot 10^{-4} \cos(\alpha_e) & 0 \\ 1.232 \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} & 0 & -0.2538 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -22500 & -210 \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 22500 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

Nous vérifierons pour chaque position d'équilibre considérée si la paire de matrice (A, B) ainsi calculée est commandable.

5.2.2 Construction des contrôleurs séquencés

5.2.2.1 Méthode utilisant les fonctions de Lyapunov assignables

Nous commençons par considérer la position d'équilibre $\alpha_e = 0^\circ$.

Existence et détermination d'une fonction de Lyapunov assignable sur un voisinage de l'origine :

Afin de stabiliser asymptotiquement le missile autour de l'origine, nous linéarisons le système en $\alpha_e = 0^\circ$. En utilisant les relations 5.23 et 5.24, nous obtenons :

$$A = \begin{pmatrix} -0.0058 & 1 & -7.0346 \cdot 10^{-4} & 0 \\ -0.2723 & 0 & -0.2538 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -22500 & -210 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 22500 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons vérifier que la paire (A, B) est commandable. Nous plaçons alors les pôles de cette linéarisation en $[-1.6 \quad -3 \quad -1.5 \quad -200]$. Le choix de ces pôles a été fait arbitrairement. Nous obtenons ainsi pour gain du retour d'états $u = -Kx$:

$$K = [-0.1915 \quad -0.3994 \quad -0.9453 \quad -0.0002].$$

Le système ainsi bouclé est asymptotiquement stable autour de l'origine.

Nous résolvons alors l'équation de Lyapunov :

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -Q$$

où Q est l'identité. Nous définissons alors la fonction $V : x \rightarrow x^T P x$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} 48.3385 & 90.0839 & -9.4054 & 0.0056 \\ 90.0839 & 202.3556 & -24.122 & -0.0101 \\ -9.4054 & -24.122 & 4.1246 & 0.0054 \\ 0.0056 & -0.0101 & 0.0054 & 0.0025 \end{pmatrix}.$$

V ainsi définie est assignable sur un voisinage de l'origine.

Nous notons $\Omega(c) = \{x \in \mathbb{R}^4 : V(x) < c\}$ avec $c > 0$.

Assignabilité de V sur $\Omega(c)$:

La vérification de l'assignabilité de V sur $\Omega(c)$ est effectuée en utilisant la procédure exposée au chapitre 3. Comme nous l'avons spécifié précédemment le nombre d'états linéaires et le nombre de commandes de ce système permet la paramétrisation du noyau de commandabilité en utilisant le théorème de McConley, Appelby, Dahleh et Feron (McConley, Appelby, Dahleh, Feron, 2000).

Afin de réaliser cette paramétrisation, nous avons mis le système bouclé par le retour d'états $u = -Kx$ sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_n \\ \dot{x}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n(x_n) \\ f_l(x_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_n(x_n) \\ A_l(x_n) \end{pmatrix} x_l + \begin{pmatrix} g_n(x_n) \\ g_l(x_n) \end{pmatrix} u,$$

avec $x_n = \alpha$ et $x_l = [q \ \delta \ \dot{\delta}]^T$. Ainsi :

$$f_n(\alpha) = 0.0155 \cos(\alpha) Cn,$$

$$f_l(\alpha) = \begin{pmatrix} 1.232Cm \\ 0 \\ 4308.525\alpha \end{pmatrix}.$$

$$A_n(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -5.27.10^{-4} \cos(\alpha) & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_l(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -0.2538 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8.9874 & -43770 & -206.0942 \end{pmatrix},$$

$$g_n(\alpha) = 0,$$

$$\text{et } g_l(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 22500 \end{pmatrix}.$$

où :

$$Cn = 1.0286.10^{-4}\alpha^3 - 0.94457.10^{-2}|\alpha|\alpha - 0.1696(5/3)\alpha,$$

et :

$$Cm = 2.1524.10^{-4}\alpha^3 - 1.9546.10^{-2}|\alpha|\alpha - (13/3)0.051\alpha.$$

En utilisant ces notations et en découpant P selon les dimensions de x_n et x_l , pour chaque valeur de α tel que $\Omega(c)$ est non vide, nous sommes en mesure de paramétrer le noyau de commandabilité.

Le problème d'assignabilité de V revient alors pour chaque valeur de α à un problème d'inclusion de deux ensembles de la forme :

$$\{\lambda \in \mathbb{R}^2 : \lambda^T M(\alpha) \lambda + 2\beta(\alpha)^T \lambda + \gamma(\alpha) < 0\}.$$

Ainsi, nous effectuons une S-procedure pour chaque valeur de α telle que $\Omega(c)$ est non vide.

En utilisant cette méthode, nous avons montré que V est assignable sur $\Omega_0 = \Omega(243.2965)$.

Arrêt de la procédure :

Nous constatons que V est assignable sur $\Omega(243.2965)$. Dans ce cas, E (l'ensemble des points d'équilibre pris pour objectif) est inclus dans $\Omega(243.2965)$. Ainsi, la procédure de dichotomie n'est pas nécessaire. De plus, aucune nouvelle linéarisation n'est utile.

Nous pouvons alors calculer une commande qui assigne V à être de Lyapunov sur Ω_0 en utilisant la formule de Sontag (Sontag, 1990) :

$$u = \begin{cases} -\frac{a + \sqrt{a^2 + b^4}}{b}, & \text{si } b \neq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.25)$$

avec $a = L_{\tilde{f}}V$ (où $\tilde{f}(x_n, x_l) = f(x_n) + A(x_n)x_l$) et $b = L_gV$.

Une représentation graphique de Ω_0 est donnée à la figure 5.5.

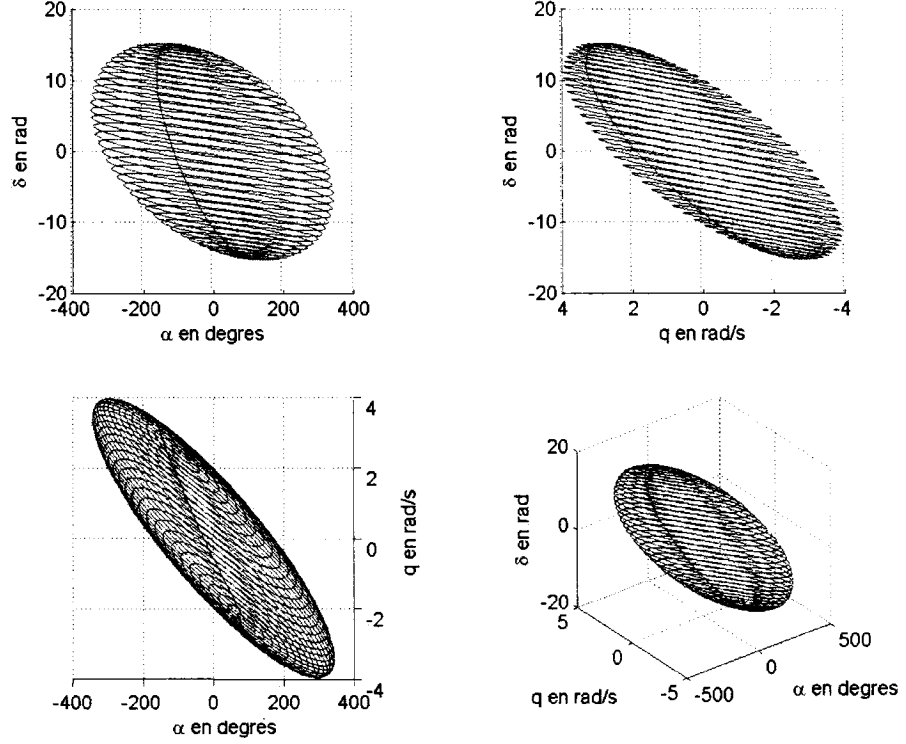


FIG. 5.5 Représentation graphique de Ω_0

5.2.2.2 Méthode utilisant l'estimation de domaines d'attraction

Existence d'un domaine d'attraction

Pour tous les points d'équilibre x_e autour desquels nous effectuerons un linéarisation, nous réaliserons un retour d'états $u = -K(x - x_e)$ en plaçant les pôles en -1.6 , -3 , -1.5 , et -200 . Les matrices A et B de ces linéarisations sont calculées en utilisant les formules 5.23 et 5.24.

Ainsi le système sera rendu asymptotiquement stable autour de chaque position d'équilibre considérée. Nous sommes ainsi assurés de l'existence d'un domaine d'attraction.

Nous résolvons alors l'équation de Lyapunov :

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -Q \quad (5.26)$$

où nous avons choisi l'identité pour valeur de Q .

Pour chaque point de linéarisation, noté x_e , la fonction $V : x \rightarrow (x - x_e)^T P(x - x_e)$ est une fonction de Lyapunov.

Notons $\Omega(c) = \{x \in \mathbb{R}^4 : V(x) < c\}$, avec $c > 0$. Dans le cadre du théorème de Lasalle, $\Omega(c)$ est le domaine d'attraction si $\dot{V}(x) < 0$ en tout point de $\Omega(c)$.

Nous allons détailler la procédure pour la première itération.

Calcul de K et choix de V

Nous prenons l'origine pour premier point de linéarisation. En utilisant les relations 5.23 et 5.24, nous obtenons les matrices jacobienes du système en boucle ouverte :

$$A = \begin{pmatrix} -0.0058 & 1 & -7.0346 \cdot 10^{-4} & 0 \\ -0.2723 & 0 & -0.2538 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -22500 & -210 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 22500 \end{pmatrix}.$$

Nous plaçons les pôles du système linéarisé en -1.6 , -3 , -1.5 , et -200 via la

commande $\delta_c = -Kx$, avec $K = [-0.1915 \quad -0.3994 \quad -0.9453 \quad -0.0002]$. En résolvant l'équation 5.26, nous obtenons :

$$P = \begin{pmatrix} 48.3385 & 90.0839 & -9.4054 & 0.0056 \\ 90.0839 & 202.3556 & -24.122 & -0.0101 \\ -9.4054 & -24.122 & 4.1246 & 0.0054 \\ 0.0056 & -0.0101 & 0.0054 & 0.0025 \end{pmatrix}.$$

Nous considérons alors la fonction de Lyapunov $V : x \rightarrow x^T P x$.

Posons $\Omega(c) = \{x \in \mathbb{R}^4 : V(x) < c\}$.

Vérification si $\Omega(c)$ est un estimé de domaine d'attraction pour $c > 0$ fixé :

$\Omega(c)$ est une estimation du domaine d'attraction si $\dot{V}(x) < 0$ pour tout point $x \in \Omega(c)$. Afin de vérifier cette condition, nous mettons le système en boucle fermée sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_n \\ \dot{x}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n(x_n) \\ f_l(x_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_n(x_n) \\ A_l(x_n) \end{pmatrix} x_l \quad (5.27)$$

où $x_n = \alpha$ et $x_l = [q \quad \delta \quad \dot{\delta}]^T$. Ainsi :

$$f_n(\alpha) = 0.0155 \cos(\alpha) C n,$$

$$f_l(\theta) = \begin{pmatrix} 1.232 C m \\ 0 \\ 4308.525 \alpha \end{pmatrix},$$

$$A_n(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -5.27 \cdot 10^{-4} \cos(\alpha) & 0 \end{pmatrix},$$

et :

$$A_l(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -0.2538 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8.9874 & -43770 & -206.0942 \end{pmatrix}.$$

En découpant P selon les dimensions de x_n et de x_l , nous obtenons les expressions de $V(x_n, x_l)$ et de $\dot{V}(x_n, x_l)$ en appliquant les relations :

$$V(x_n, x_l) = x_n^T P_{nn} x_n + 2x_n^T P_{nl} x_l + x_l^T P_{ll} x_l \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_n, x_l) = & x_n^T (P_{nn} f_n + P_{nl} f_l) + \\ & (x_n^T (P_{nn} A_n + P_{nl} A_l) + f_l^T P_{ll} + f_n^T P_{nl}) x_l + \\ & x_l^T (P_{ln} A_n + P_{ll} A_l) x_l \end{aligned} \quad (5.29)$$

Considérons alors une constante $c > 0$. Vérifier si \dot{V} est strictement négative sur $\Omega(c)$ revient à tester l'inclusion de deux ensembles de la forme :

$$\{x_l \in \mathbb{R}^3 : x_l^T M(x_n) x_l + 2\beta^T(x_n) x_l + \gamma(x_n) < 0\},$$

pour tout x_n tel que $\Omega(c)$ est non vide.

Ainsi, nous effectuons un quadrillage de l'ensemble des x_n admissibles comportant 1000 points. Le choix de ce nombre de points a été fait pour rendre le découpage raisonnablement représentatif de l'ensemble des valeurs admissibles. Pour chaque point de cet ensemble, nous vérifions l'inclusion de $\Omega(c)$ dans $\{x \in \mathbb{R}^4 : \dot{V}(x) < 0\}$ en utilisant la S-procedure.

Choix de $c > 0$:

Une dichotomie est réalisée pour obtenir la valeur de c la plus grande possible. Afin d'amorcer la procédure, nous remarquons que $\Omega(2.433)$ est une estimation du domaine d'attraction, alors que $\Omega(24.3297)$ n'en est pas une.

Le test d'arrêt choisi est $c_{sup} - c_{inf} < 0.01$. Nous obtenons alors pour estimation du domaine d'attraction $\Omega_0 = \Omega(7.8109)$.

Choix du point suivant et arrêt de la procédure :

L'ensemble des points d'équilibre $\alpha_e \in [0^\circ, 90^\circ]$, noté E , n'est pas inclus dans Ω_0 . Il faut donc trouver un autre point d'équilibre inclus dans Ω_0 et reprendre la procédure en ce point. Nous prenons pour point suivant $\alpha_e = 18.4225^\circ$. Nous interrompons l'algorithme lorsque E est inclus dans l'union des estimations effectuées.

Résultat final :

7 estimations sont nécessaires pour concevoir le contrôleur désiré. Nous avons été amenés à linéariser le système autour des positions :

$$\{0^\circ; 18.4225^\circ; 29.4056^\circ; 40.7759^\circ; 52.7144^\circ; 64.989^\circ; 77.6961^\circ\}.$$

L'ensemble des domaines d'attraction calculés est représenté par la figure 5.6.

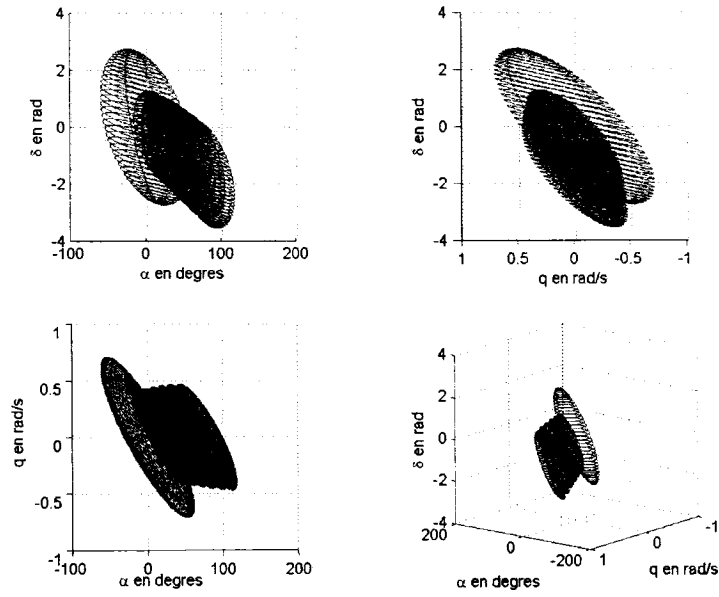


FIG. 5.6 Ensemble des estimés calculés pour le missile

5.2.2.3 Bilan

Nous avons vu au travers de cet exemple que la moindre étendue des ellipsoïdes calculés avec l'estimation de domaines d'attraction que par celle utilisant les fonctions de Lyapunov assignables peut conduire un plus grand nombre de linéarisations.

Cet exemple est un cas extrême, en effet une seule linéarisation a été nécessaire pour concevoir un contrôleur répondant au cahier des charges avec la méthode utilisant les fonctions de Lyapunov assignables.

5.3 Cas d'un système de lévitation magnétique

Au cours de cet exemple, nous allons mettre en avant certaines difficultés. En effet, dans ce cas, nous remarquerons que le noyau de commandabilité n'est pas paramétrable en utilisant le théorème de McConley, Appelby, Dahleh et Feron (McConley, Appelby, Dahleh, Feron, 2000).

Nous utiliserons donc la méthode basée sur l'estimation des domaines d'attraction. Cependant, nous verrons que ce procédé conduit à des estimés de très faible volume.

5.3.1 Présentation du système

Définition du système :

On considère le système schématisé à la figure 5.7.

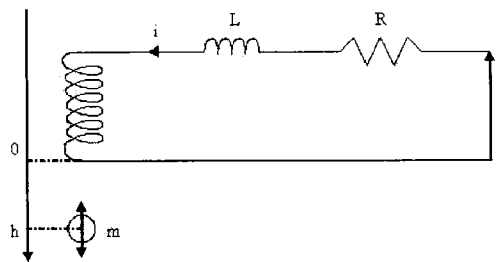


FIG. 5.7 *Système de lévitation magnétique*

Le modèle d'état non linéaire de ce système est donné par le système d'équations 5.30 (c.f. par exemple (?)).

$$\begin{pmatrix} \dot{h} \\ \dot{i} \\ \ddot{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{h} \\ \frac{1}{L}(-Ri + \frac{L_o a \dot{h} i}{(a+h)^2} + u) \\ g - \frac{k}{m}\dot{h} - \frac{L_o a i^2}{2m(a+h)^2} \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

Avec :

$$L = L_1 + \frac{L_o}{1 + h/a} \quad (5.31)$$

h est la distance entre le centre de la bille et l'origine, i est le courant circulant dans le circuit et u est la tension aux bornes du circuit. u est la commande du système.

Nous utiliserons les valeurs numériques du tableau 5.3.

Paramètres	Valeurs numériques
g	9.81
m	0.01
a	0.05
L_o	0.01
L_1	0.02
R	10
k	0.001

TAB. 5.3 Valeurs numériques des paramètres du système de lévitation magnétique

Nous remarquons que les non linéarités sont induites par les variables d'états h et i , ainsi :

$$x_n = \begin{pmatrix} h \\ i \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

$$x_l = \dot{h} \quad (5.33)$$

$$(5.34)$$

Ce système possède autant de commandes que d'états linéaires. Nous ne pouvons donc pas appliquer le théorème de McConley, Appelby, Dahleh et Feron (McConley, Appelby, Dahleh, Feron, 2000) pour paramétrer le noyau de commandabilité. Nous utiliserons donc la méthode basée sur l'estimation de domaines d'attraction.

Connexité de l'ensemble des points d'équilibre :

Les points d'équilibre correspondant à $h = h_e$ sont définis par les relations suivantes :

$$i_e = \sqrt{(2mg/(L_o a))(a + h_e)} \quad (5.35)$$

$$u_e = Ri_e \quad (5.36)$$

Ces relations sont obtenues à partir du modèle d'état.

i_e et u_e sont des fonctions de h_e continues sur $] -a, +\infty[$. Par abus de langage, nous définirons un point d'équilibre par la valeur de h_e à laquelle elle se réfère.

Commandabilité du système :

La linéarisation de ce système autour d'un point d'équilibre h_e est donnée par les

matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{L^2 a(1+h_e/a)^2} L_o(u_e - Ri_e) & -\frac{R}{L} & \frac{L_o a i_e}{L(a+h_e)^2} \\ \frac{L_o a i_e^2}{m(a+h_e)^3} & -\frac{L_o a i_e}{m(a+h_e)^2} & -\frac{k}{L} \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

Nous pouvons alors vérifier pour chaque position d'équilibre si la paire (A, B) est commandable.

5.3.2 Une estimation aboutissant à un ellipsoïde de faible volume

Définition de V :

Nous considérons la position d'équilibre $h_e = 0$.

Nous obtenons les matrices A et B de la linéarisation du système en appliquant les formules 5.37 et 5.38. Ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -333.3333 & 6.603 \\ 392.4 & -19.8091 & -0.1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 33.3333 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Afin de construire un gain stabilisant le système autour de l'origine, nous résolvons l'équation de Riccati avec $Q = \text{diag}([1 \ 1 \ 1/100])$ et $R = 1$. Nous obtenons ainsi :

$$P = \begin{pmatrix} 4536.0525 & -12.6428 & 226.3 \\ -12.6428 & 0.0367 & -0.6307 \\ 226.3 & -0.6307 & 11.2902 \end{pmatrix}.$$

Le système est rendu asymptotiquement stable autour de l'origine appliquant le retour d'états $u = -Kx$, avec :

$$K = R^{-1}B^T P = [-421.4276 \quad 1.2245 \quad -21.0243].$$

La fonction $V : x \rightarrow x^T P x$ est alors une fonction de Lyapunov pour le système en boucle fermée. Nous posons $\Omega(c) = \{x \in \mathbb{R}^3 : V(x) < c\}$. Nous sommes assurés de l'existence d'une constante $c > 0$ telle que $\Omega(c)$ soit inclus dans l'ensemble des points tels que $\dot{V} < 0$. Un tel domaine est une estimation du domaine d'attraction.

Détermination de $c > 0$ tel que $\Omega(c)$ estime le domaine d'attraction

Nous remarquons que $\Omega(3.1999.10^{-9})$ est une estimation du domaine d'attraction alors que $\Omega(3.1999.10^{-8})$ n'en est pas une. Une dichotomie affinerait un peu l'ensemble obtenu. Néanmoins, étant donné la taille de $\Omega(3.1999.10^{-8})$ une telle procédure s'avérerait inutile. Nous prenons $\Omega_0 = \Omega(3.1999.10^{-9})$ pour estimé du domaine d'attraction.

5.3.3 Bilan

Nous constatons que Ω_0 est un ellipsoïde de très faible volume. Ainsi, le point de linéarisation suivant est $h_e = 7.488.10^{-7}$.

Si nous avons pour objectif de concevoir un contrôleur qui permette de ramener vers l'origine toute trajectoire débutant en $h_e \in [0, h_{max}]$, avec h_{max} de l'ordre

de la dizaine de centimètres, alors nous devrions effectuer un nombre faramineux de linéarisation. La conception d'un contrôleur répondant à l'objectif est alors calculatoirement extrêmement lourde.

Notons que l'estimation qui a été effectué a nécessité 263 secondes de simulation.

CONCLUSION

Au cours de ce mémoire, nous avons pour but de concevoir des contrôleurs ayant l'objectif suivant :

Soit E un ensemble de points d'équilibre. Soit $x_{objectif}$ un point d'opération du système non linéaire considéré. Nous désirons concevoir une commande telle que toute trajectoire débutant dans E converge vers $x_{objectif}$.

Pour atteindre cet objectif, nous avons commencé par faire une présentation générale des méthodes de séquençage de gains. Ceci a été l'objet du premier chapitre. Parmi les procédés existants, nous avons distingué ceux qui font appel aux modélisations LPV et ceux qui utilisent des méthodes de linéarisation. Pour cette dernière classe de méthodes, deux difficultés ont été soulevées. La première concernait le choix des points de linéarisation, la seconde portait sur la continuité de la commande.

Nous avons présenté lors des chapitres 3 et 4 deux méthodes de séquençage de contrôleurs qui intégraient le choix des points de linéarisation. Afin de mettre en pratique ces méthodes, nous avons utilisé les inégalités matricielles linéaires. Ceci a été l'objet du second chapitre.

La première méthode exposée utilisait les fonctions de Lyapunov assignable. Cette méthode est applicable, si le système présente plus d'états linéaires que de commandes. Sous cette condition, nous sommes en mesure de concevoir un contrôleur répondant aux objectifs.

Si le système ne possède pas plus d'états linéaires que de commandes, nous avons élaboré une méthode qui permettait de s'abroger de cette contrainte. Celle-ci utilise

l'estimation de domaines d'attraction. La méthode d'estimation utilisée est basée sur le théorème de Lasalle.

Au travers de trois études de cas réalisées lors du chapitre 5, nous avons constaté que lorsque les deux méthodes étaient applicables, celle basée sur les fonctions de Lyapunov assignables permettait la construction d'une loi de commande nécessitant moins de commutations.

Nous avons aussi mis en avant la possibilité d'obtenir des domaines d'attraction extrêmement conservatifs. Dans ce cas le nombre de linéarisations est extrêmement élevé, ce qui rend la procédure lourde calculatoirement parlant.

Un axe de recherche possible concerne l'estimation de domaines d'attraction moins conservatifs. Ceci peut être fait en conservant une méthode d'estimation basée sur le théorème de Lasalle. Les points à optimiser sont alors le choix de la fonction de Lyapunov et une obtention plus fine de l'ensemble invariant. Des méthodes basées sur d'autres théorèmes peuvent aussi être l'objet de recherche.

De plus, nous n'avons que très brièvement évoqué le problème de continuité de la commande. Ceci peut aussi faire l'objet de travaux futurs.

Dans le cas où le noyau de commandabilité n'est pas paramétrable, il semble intéressant d'étudier la possibilité d'accroître la taille du modèle d'état en ajoutant des états linéaires. Ceci semble être possible en ajoutant arbitrairement des états linéaires ou en assurant l'existence d'une fonction de Lyapunov assignable via un contrôleur linéaire d'un certain ordre. La faisabilité de tels méthodes pourrait faire l'objet de travaux futurs.

RÉFÉRENCES

Aström, K.J., Rundqwist, L., 1989, *Integrator windup and how to avoid it*, pp.1693-1698 Proceedings of the 1989 American Control Conference.

Aström, K.J., Wittenmark, B., 1989, *Computer control systems theory and design*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V., 1994, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia.

Chadli, M., 2002, *Stabilité et commande de systèmes décrits par des multimodèles*, Centre de Recherche en Automatique de Nancy, Vandoeuvre-Les-Nancy.

Chiang, H.D., Hirsch, M.W, Wu, F.F, 1986, *Stability region of nonlinear autonomous dynamical systems*, Electronics research laboratory, Berkeley Californie.

Clément, B., 2001, *Synthèse Multiobjectifs et séquençement de gains : application au pilotage d'un lanceur spatial*, Thèse de Doctorat Supélec, Paris XI.

Clément, B., Duc, G., 2002, *Condition suffisante de stabilité pour l'interpolation linéaire de correcteurs*, Supelec, service automatique.

Coraluppi, S.P., 1992, *Optimal estimation of domains of attraction for nonlinear dynamical systems*, Master of Science Thesis, University of Maryland.

Darbois, A., 2001, *Mise en oeuvre du modèle et synthèse d'une loi de commande par commutation de compensateurs pour un avion commercial*, Thèse de Maîtrise es-sciences appliquées, Ecole Polytechnique de Montréal.

Faubourg, L., Faubourg, J.B., 1999, *Design of control Lyapunov functions for homogeneous Jurdjevic-Quinn systems*, rapport de recherche, INRIA.

Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A.J., Chiladi, M., 1995, *LMI Control Toolbox*, The MathWorks.

Genesio, R., Tartaglia, M., Vicino, A., 1985, *On estimation of asymptotic stability regions : state of the art and new proposals*, vol.AC-30, IEEE Transactions on automatic control.

Hanus, Kinnaert, Henrotte, 1987, *Conditionning technique, a general anti-windup and bumpless transfert method*, 23(6), pp.729-39, Automatica.

Kazakova-Frehse, N., Frick, K., 1998, *The estimation of a robust domain of attraction using Gersgorin theorem*, vol.8, 295-303, International Journal of Robust and Nonlinear Control.

Khalil, H.K., 2002, *Nonlinear Systems*, 3rd Edition, Prentice-Hall.

Leith, D.J., Leithead, W.E., 1998, *Gain-scheduled and nonlinear systems : dynamic analysis by velocity-based linearization families*, 70(2). pp.289-317 INT.J.CONTROL.

Leith, D.J., Leithead, W.E., 2000, *Survey of Gain-Scheduling Analysis and Design*, Departement of Electronic and Electrical Engineering, University of Strathclyde.

McConley, M.W., Appelby, B.D, Dahleh, M.A, Feron, E.,2000, *A computationally Efficient Lyapunov-Based Scheduling Procedure for Contrl of Nonlinear Systems with Stability Guarantees*, Vol.-45, No.1, IEEE Transactions on Automatic Control.

Rugh, W.J., Shamma, J.S., 2000, *Research on gain scheduling*, vol.36, pp.1401-1425, Automatica.

Scorletti, G., 2003, *Optimisation et sciences de l'ingénieur : une approche basée sur l'automatique*, Cours DEA, Université de Caen.

Shamma, J.S., Athans, M., 1992, *Gain Scheduling : Potential Hazards and Possible Remedies*, 12(3), pp.101-107 IEEE Control Systems Magazine.

Sontag, E.D., 1990, *Feedback stabilisation of nonlinear systems*, pp.61-81, Robust control of linear systems and nonlinear control .

Sturm, J.F., Zhang, S., 2001, *On cones of nonnegative quadratic functions*, Discussion Paper ISSN 0924-7815.

Tan, W., Packard, A., 2003, *Searching for control Lyapunov functions using sums of squares programming*, University of California, Berkley.